信號與系統

授課老師：孫火清老師
授課班級：日四技電機二甲

教科書：信號與系統精要，陳培文，高立圖書

課程內容

- 導論
- **連續時間信號與系統**
- 連續時間線性非時變系統
- 傅立葉級數
- 傅立葉轉換
- 類比對數位取樣與轉換
- 離散時間信號與LTI系統
- Z轉換與DFT

連續時間信號與系統

- **時間連續信號又稱為類比信號 ---針對所有時間做定義。**
  1. 連續振幅信號，其振幅值隨時間而改變
  2. 離散振幅信號，其振幅為特定值
- **離散時間信號又稱為離散信號僅 ---針對特定時間點做定義**
  1. 離散信號也可分為連續振幅及離散振幅兩種
- **數位信號---同時具有時間離散（ 橫軸)及振幅離散（ 縱軸 ）的信號稱為數位信號。**

2.1 連續時間信號的轉換

- 考慮實數函數的六種轉換 (transformation)。

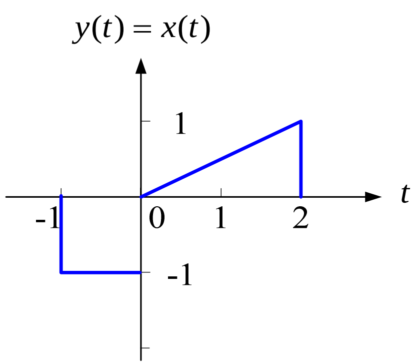
  前三種為時間轉換，另外三種為振幅轉換。

(1) 時間反向

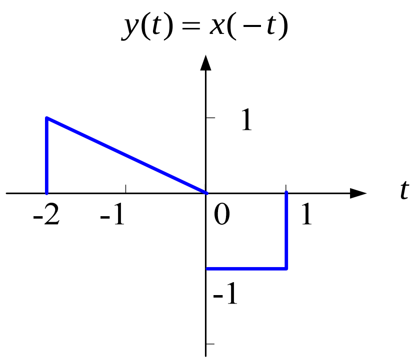
$$y(t) = x(-t)$$

對某一特定時間

$$t = t_0 \ , y(t_0) = x(-t_0) \ , y(-t_0) = x(t_0)$$



y(t) = x(t)
1
t
-1
0
1
2
-1



y(t) = x(−t)
1
t
-2
-1
0
1
-1

(2) 時間縮放 (time scaling)

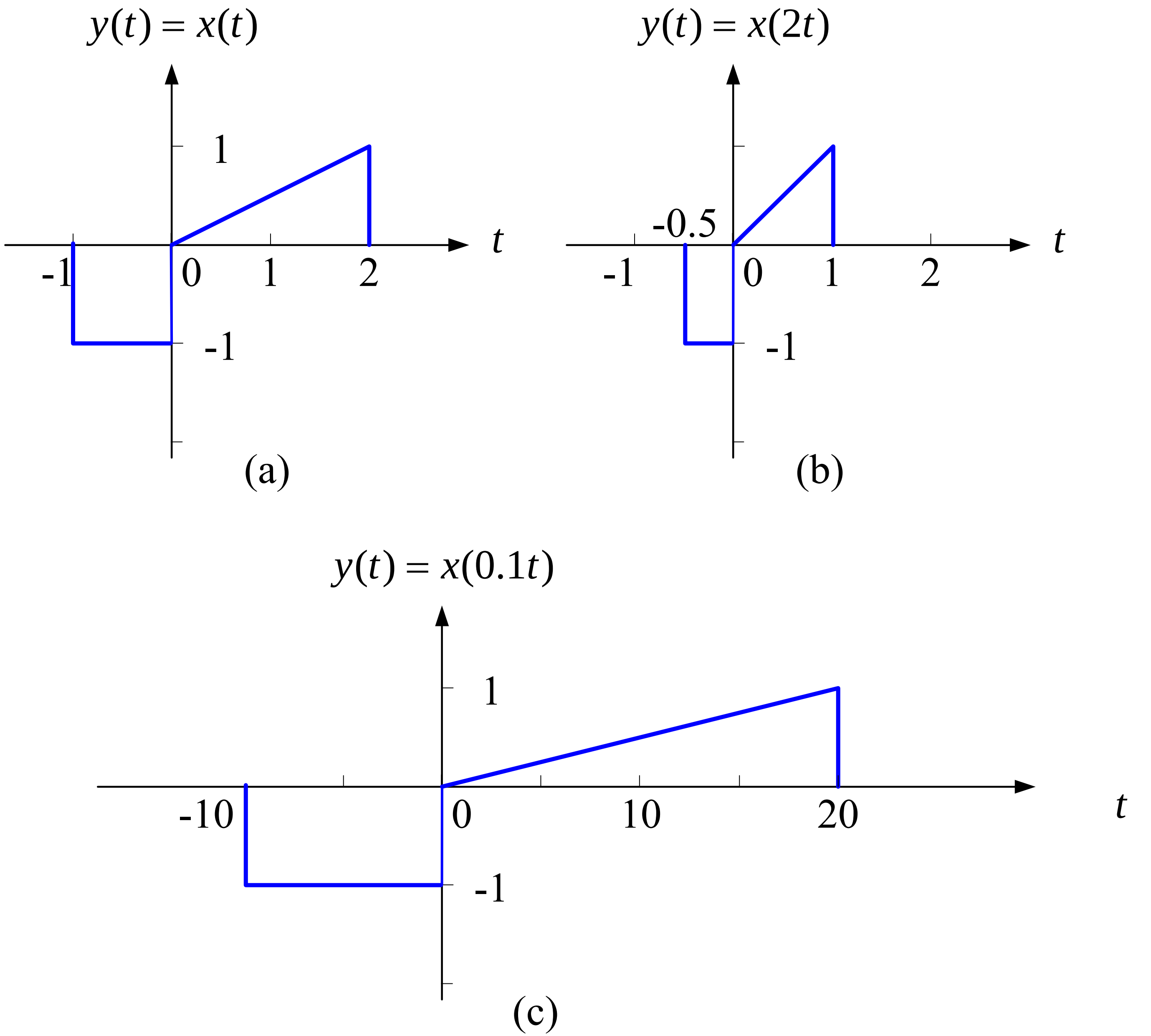
一信號 $x(t)$，其時間縮放信號為 $y(t)$

$$y(t) = x(at)$$

a為實常數 (real constant)。

$|a|>1$ ，信號$x(at)$在時間上將被壓縮

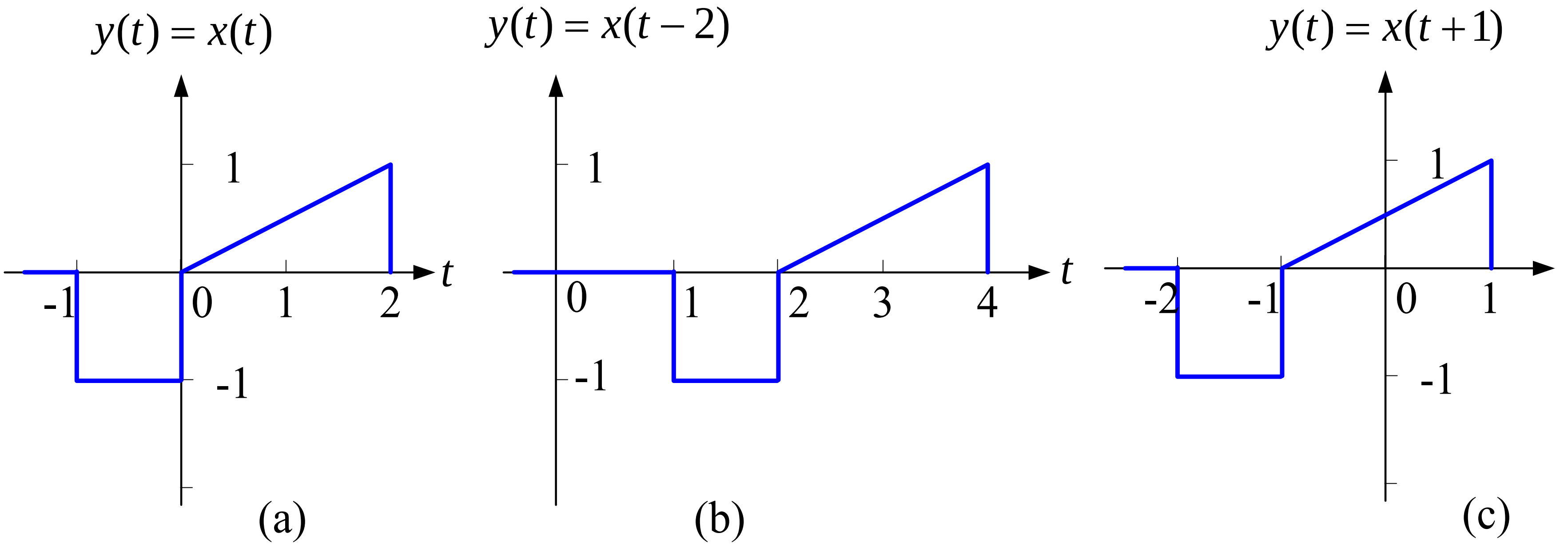
$|a|<1$ ，信號$x(at)$在時間上將被擴張



y(t) = x(t)
1
-1
0
1
2
t
-1
(a)
y(t) = x(2t)
-0.5
-1
0
1
2
t
-1
(b)
y(t) = x(0.1t)
1
-10
0
10
20
t
-1
(c)

(3) 時間位移 (time shifting)

給定一信號$x(t)$，其時間信號為 $y(t)=x(t-t_0)$，其中 t_0 為常數



繪製獨立變數轉換波形的通用法則如下：

1. 在原信號的波形圖中，以 τ 取代 t

2. 在已知轉換中 $\tau = at + b$ ，求 $t = \frac{\tau}{a} - \frac{b}{a}$

3. 在 τ - 軸下方直接畫出轉換 *t*- 軸

4. 在 *t*- 軸上繪製波形圖 $y(t)$

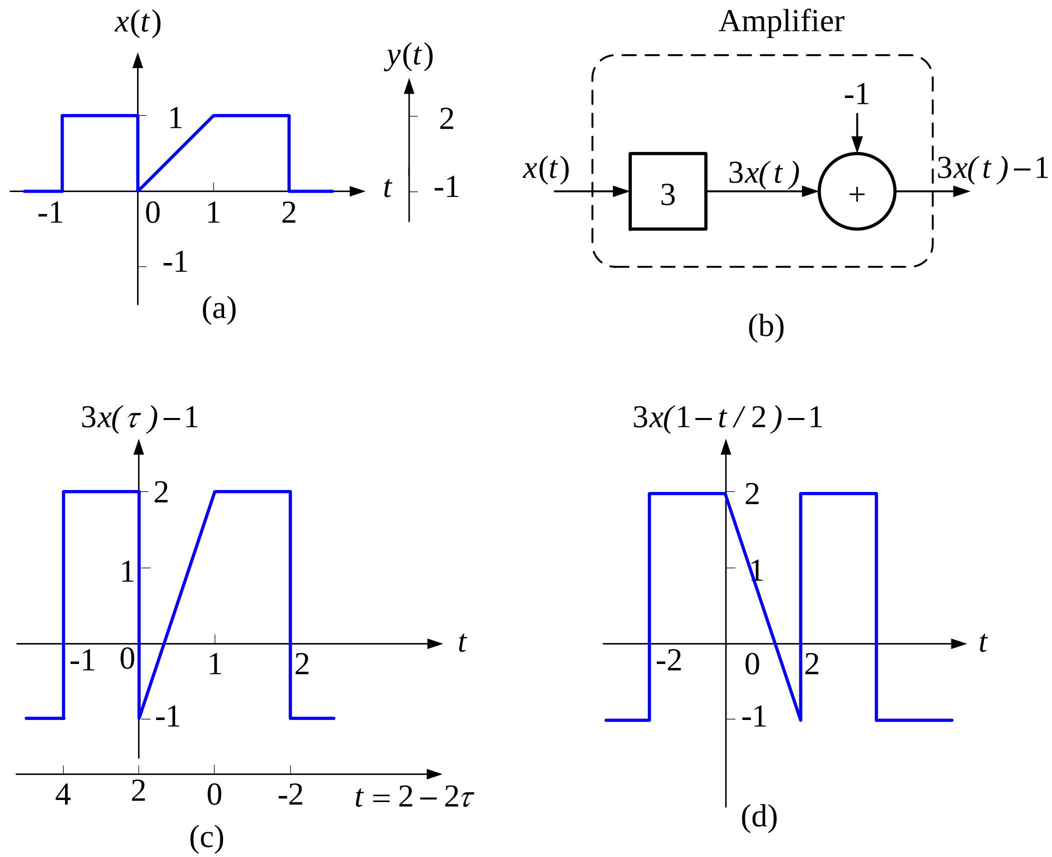
- 振幅轉換 (Amplitude Transformations
  - (4)振幅反向
  - (5)振幅縮放
  - (6)振幅位移

- 範例

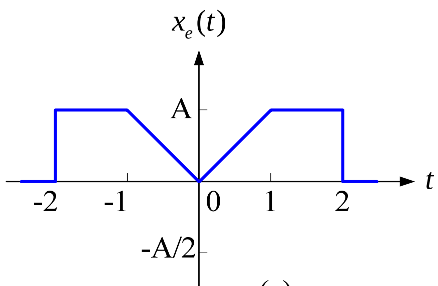
$$y(t) = -3x(t) - 5$$

$A = -3$ 造成振幅反向 (負號) 及振幅縮放$(|A| = 3)$ ，
$B = -5$ 產生信號振幅位移。

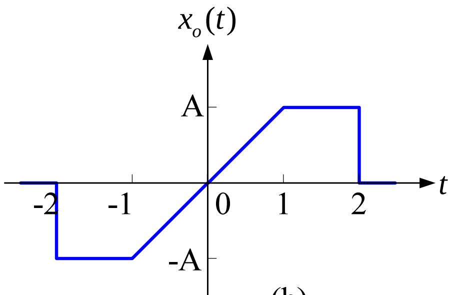
名　稱	$y(t)$
時間反向	$x(-t)$
時間縮放	$x(at)$
時間位移	$x(t-t_0)$
振幅反向	$-x(t)$
振幅縮放	$Ax(t)$
振幅位移	$x(t)+B$



x(t)
1
-1
0
1
2
-1
t
(a)
y(t)
2
-1
Amplifier
-1
x(t)
3
3x(t)
+
3x(t)−1
(b)
3x(τ)−1
2
1
-1
0
1
2
-1
t
4
2
0
-2
t = 2 − 2τ
(c)
3x(1−t/2)−1
2
1
-2
0
2
-1
t
(d)



(a)



(b)

- **偶函數與奇函數的特性如下：**

  1.兩偶函數的和為偶函數。

  2.兩奇函數的和為奇函數。

  3.偶函數與奇函數的和既非偶函數也非奇函數。

  4.兩偶函數的積為偶函數。

  5. 兩奇函數的積為偶函數。

  6.偶函數與奇函數的積為奇函數。

●週期性信號 (Periodic Signals)

一連續時間信號為週期性，若

$$x(t) = x(t + nT), \quad T > 0$$

對所有t，常數T為週期

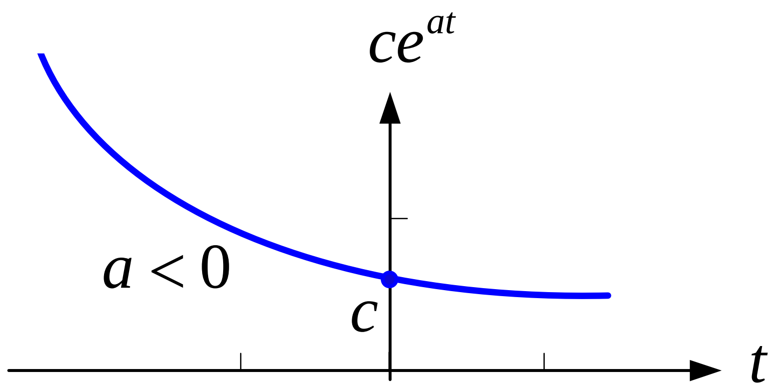
- 指數函數

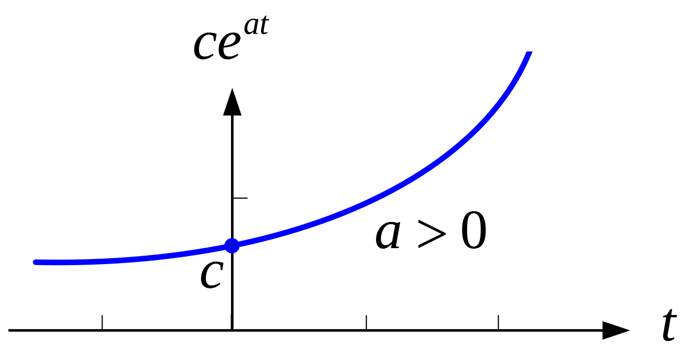
$$x(t) = Ce^{at}$$

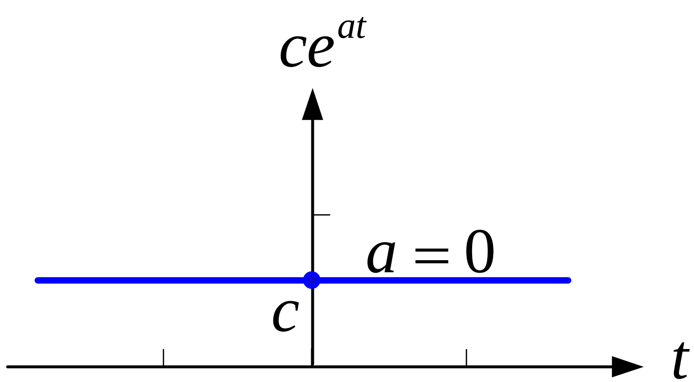
情況1：實數C 與 a

情況2：複數C，虛數a

情況3：複數C ，複數a





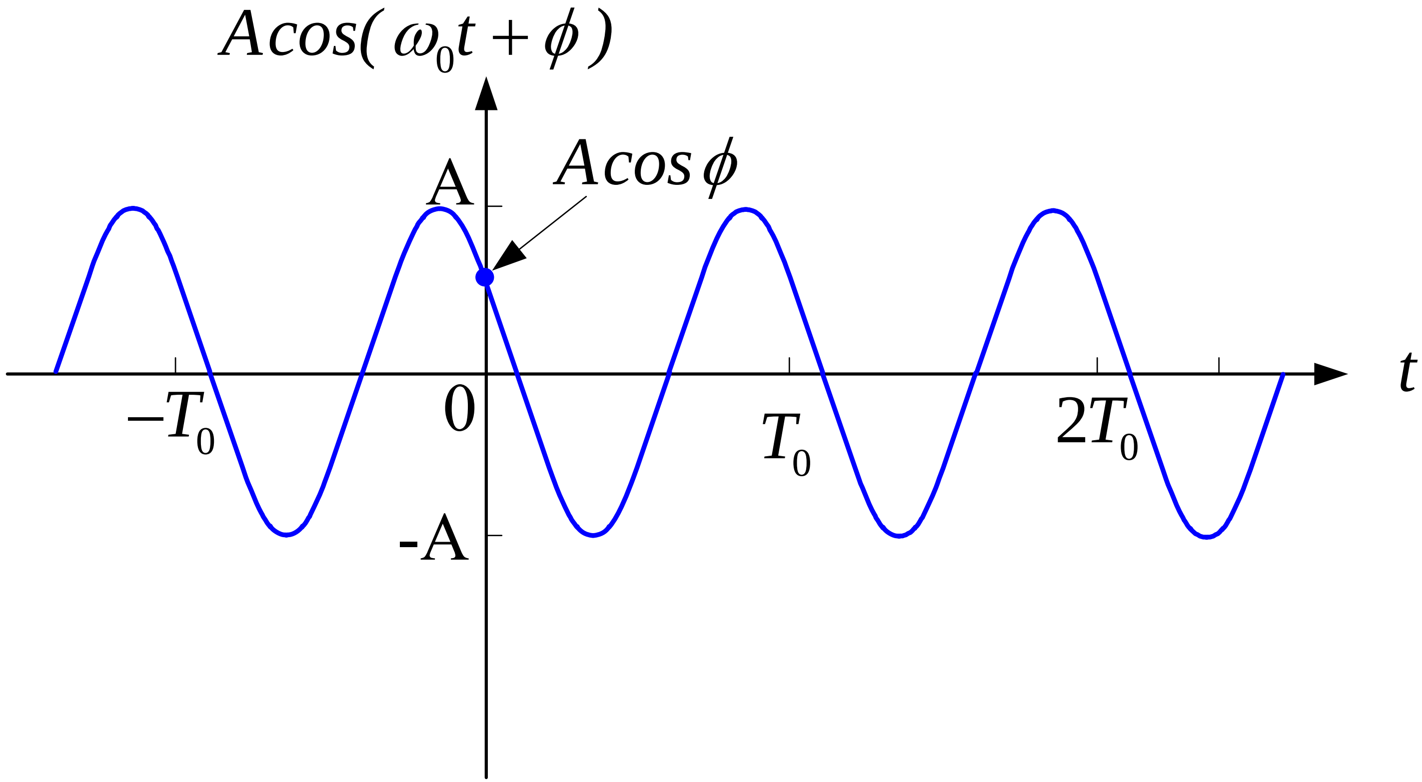


- 指數函數的分析中，下列尤拉關係式經常被使用

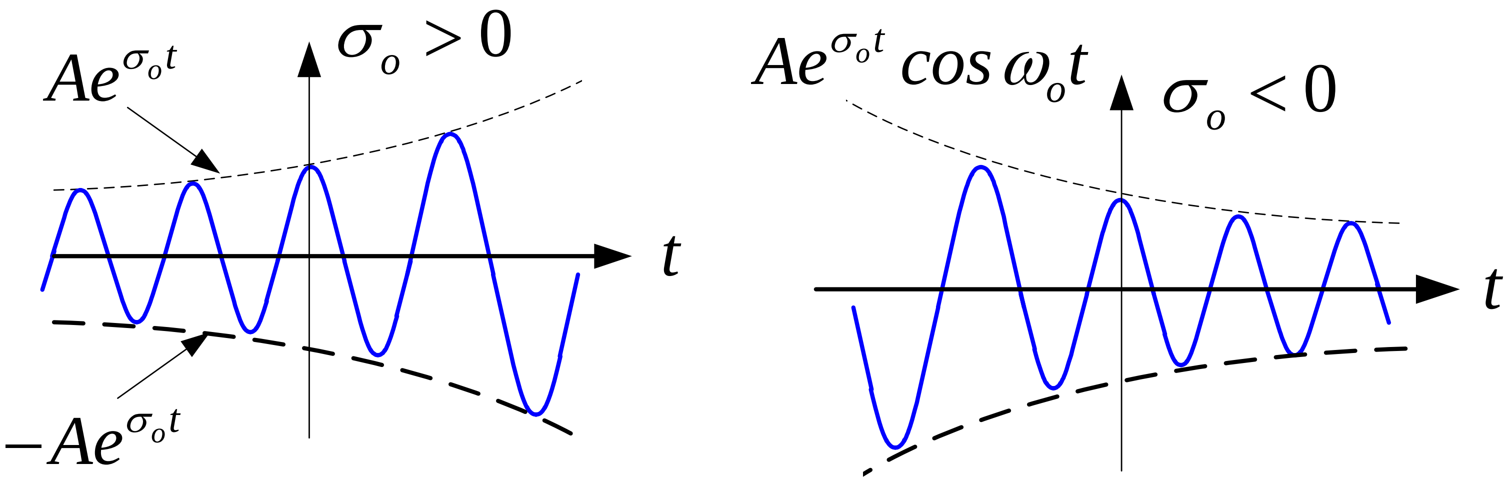
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



$A\cos(\omega_0 t + \phi)$
$A\cos\phi$
A
-A
0
$-T_0$
T_0
$2T_0$
t

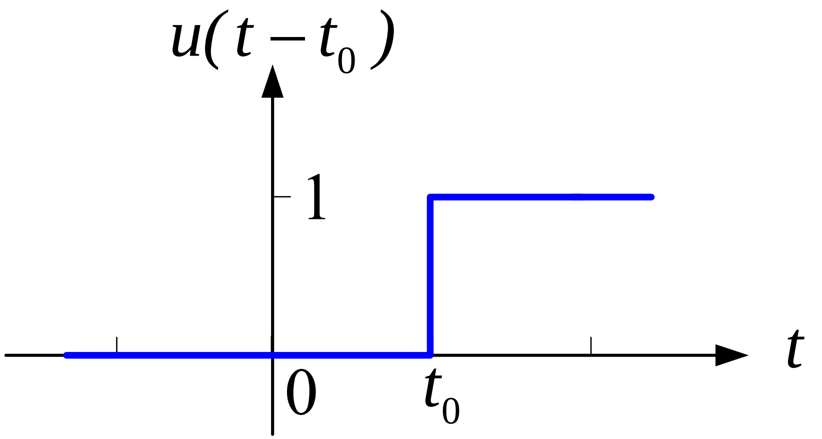


$\sigma_o > 0$
$Ae^{\sigma_o t}$
t
$-Ae^{\sigma_o t}$
$Ae^{\sigma_o t} \cos \omega_o t$
$\sigma_o < 0$
t

2.4 奇異函數 (Singularity Functions)

- 單位步階函數 (Unit Step Function)

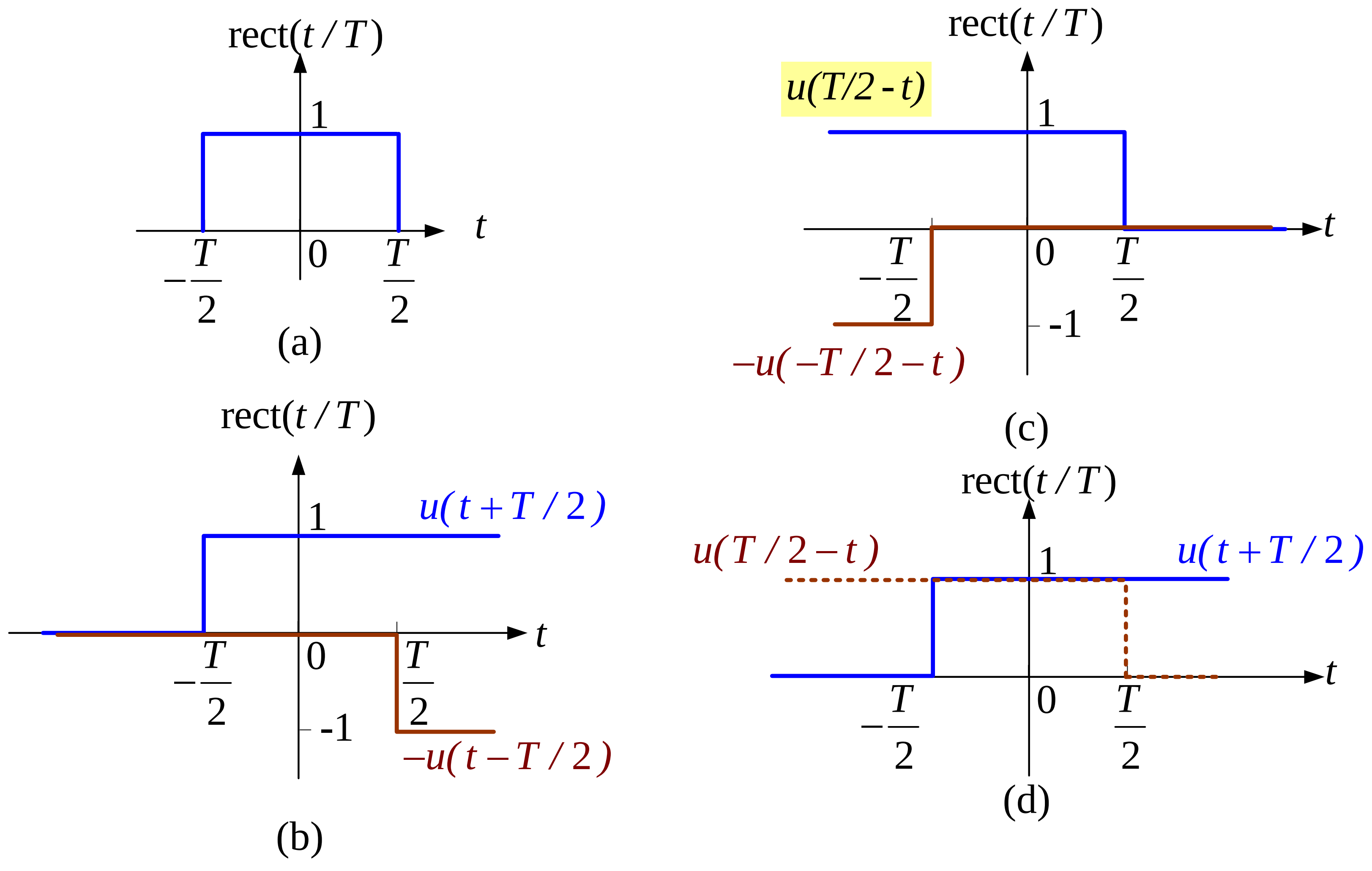
$$u(\tau)=\begin{cases}1\ , & \tau>0\\ 0\ , & \tau<0\end{cases}$$



- 單位矩形波

(unit rectangular pulse)

$$\mathrm{rect}\,(t/T)=\begin{cases}1\ , & -T/2<t<T/2\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

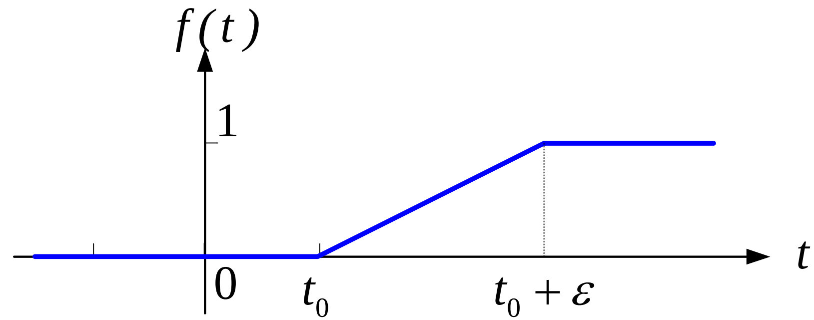


rect(t / T)
1
t
0
−T/2
T/2
(a)
rect(t / T)
u(t + T / 2)
1
t
0
−T/2
T/2
-1
−u(t − T / 2)
(b)
rect(t / T)
u(T/2 - t)
1
t
0
−T/2
T/2
-1
−u(−T / 2 − t)
(c)
rect(t / T)
u(T / 2 − t)
u(t + T / 2)
1
t
0
−T/2
T/2
(d)

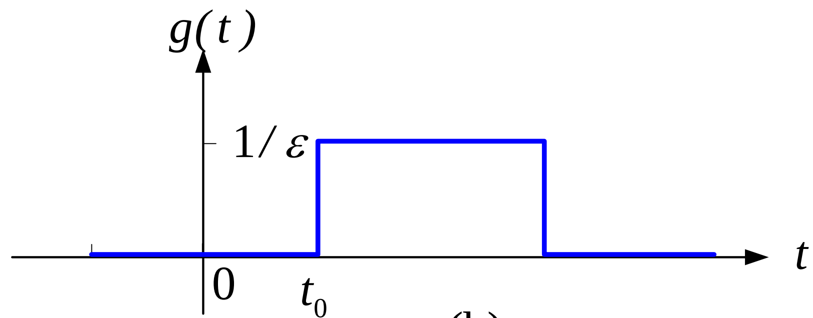
- 單位脈衝函數 (Unit Impulse Function)

$$\delta(t-t_0)=0\ ,\quad t\neq 0$$

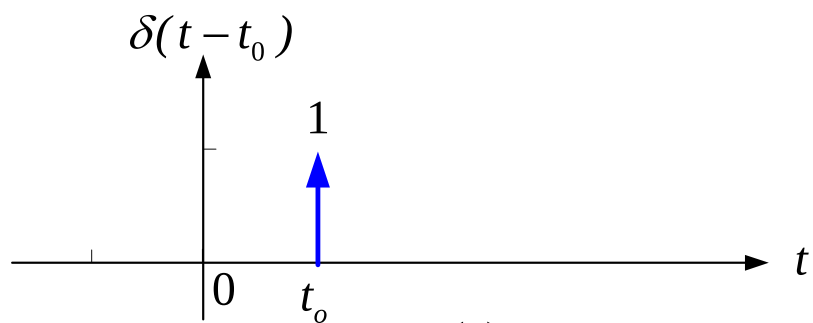
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$



(a)



(b)



(c)

● 單位脈衝函數的特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0),\ f(t) \text{ 在 } t=t_0 \text{ 時連續}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\,\delta(t)\,dt = f(-t_0),\ f(t) \text{ 在 } t=-t_0 \text{ 時連續}$$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0),\ f(t) \text{ 在 } t=t_0 \text{ 時連續}$$

$$\delta(t-t_0)=\frac{d}{dt}u\,(t-t_0)$$

$$u\,(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\,d\tau=\begin{cases}1\,, & t>t_0\\ 0\,, & t<t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at-t_0)\,dt=\frac{1}{|\,a\,|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)dt$$

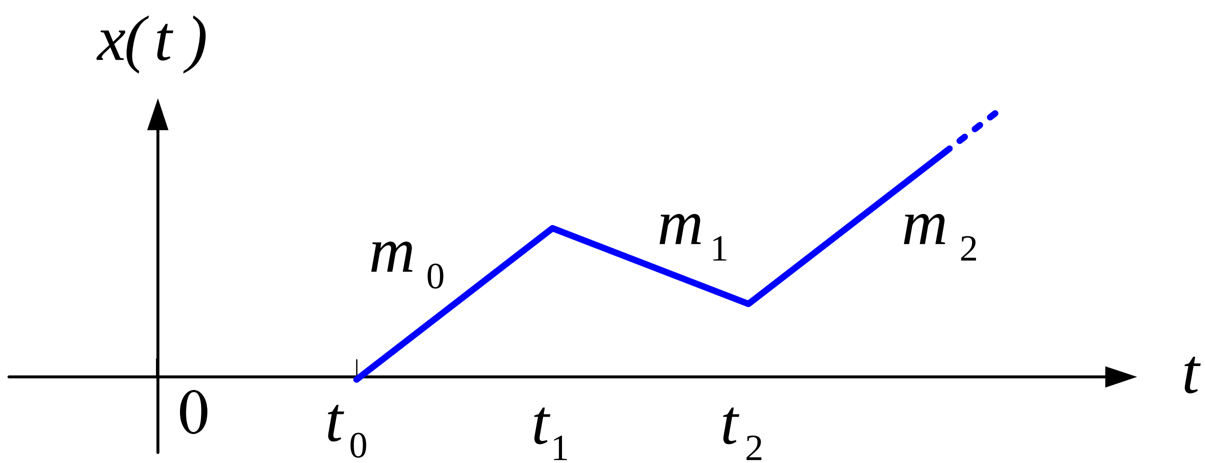
$$\delta(-t)=\delta(t)$$

2.5 信號的數學函數 (Mathematical Fun. for Sig.)

- 以下寫出由直線段構成的方程式

$$x_2(t) = m_0[t - t_0]u(t - t_0) - m_0[t - t_1]u(t - t_1) + m_1[t - t_1]u(t - t_1)$$

$$= m_0[t - t_0]u(t - t_0) + [m_1 - m_0][t - t_1]u(t - t_1)\ ; \quad t < t_2$$



2.6 連續時間系統 (Continuous-Time Systems)

- 系　統
  所謂系統是原因 – 結果 (cause-and-effect) 關係的過程

$$y(t) = T[x(t)]$$

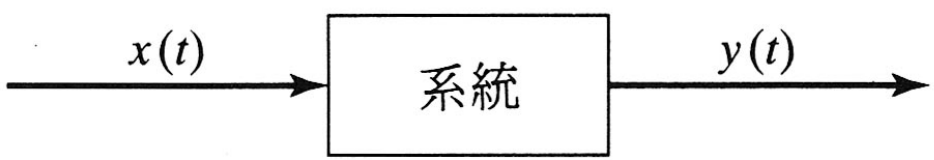


圖 2.32　一般性系統的表示法

- 首先我們定義三個方塊圖 (block-diagram elements)。

- 第一個為系統元件，為方塊形，如圖2.34(a)。
- 第二個為加總接點 (summing junction)，為圓形，
  如圖2.34(b)。接點的輸出為輸入信號的和。
- 第三個為乘積接點 (production junction)，為圓形，如圖2.34(b)。接點的輸出為輸入信號的乘積。

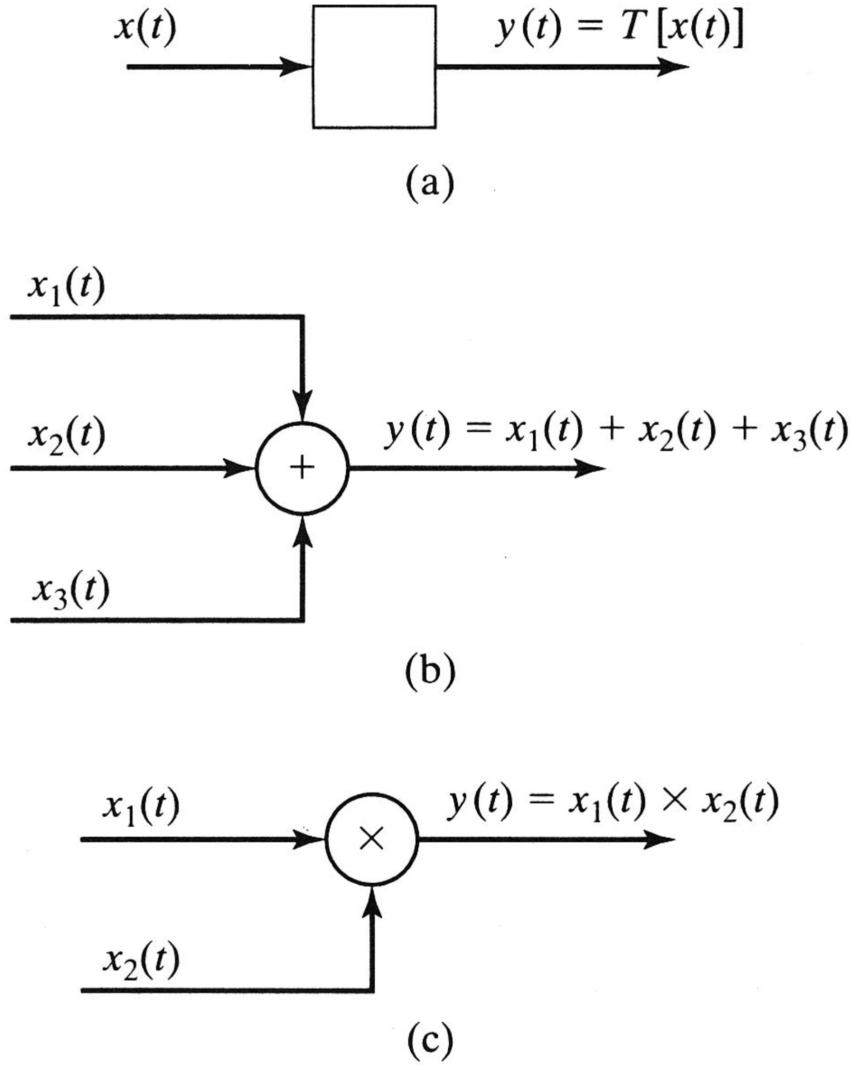


圖 2.34　*RL* 方塊圖元件

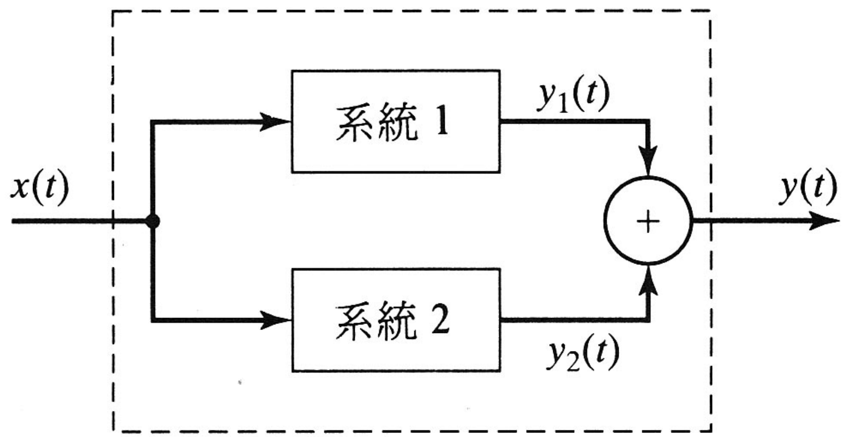
- **並聯 (parallel connection)**，如圖2.35(a)

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = T_1[x(t)] + T_2[x(t)] = T[x(t)]$$

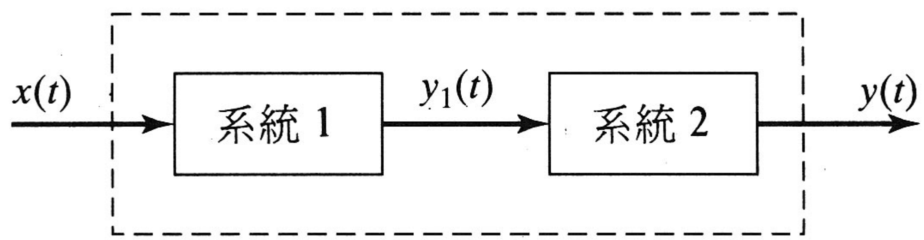
- **串聯 (series or cascade connection)**，如圖2.35(b)

$$y(t) = T_2[y_1(t)] = T_2[T_1[x(t)]] = T[x(t)]$$

交連系統 (Interconnecting Systems)



(a)



(b)

圖 2.35　系統基本連接

回授系統 (Feedback System)

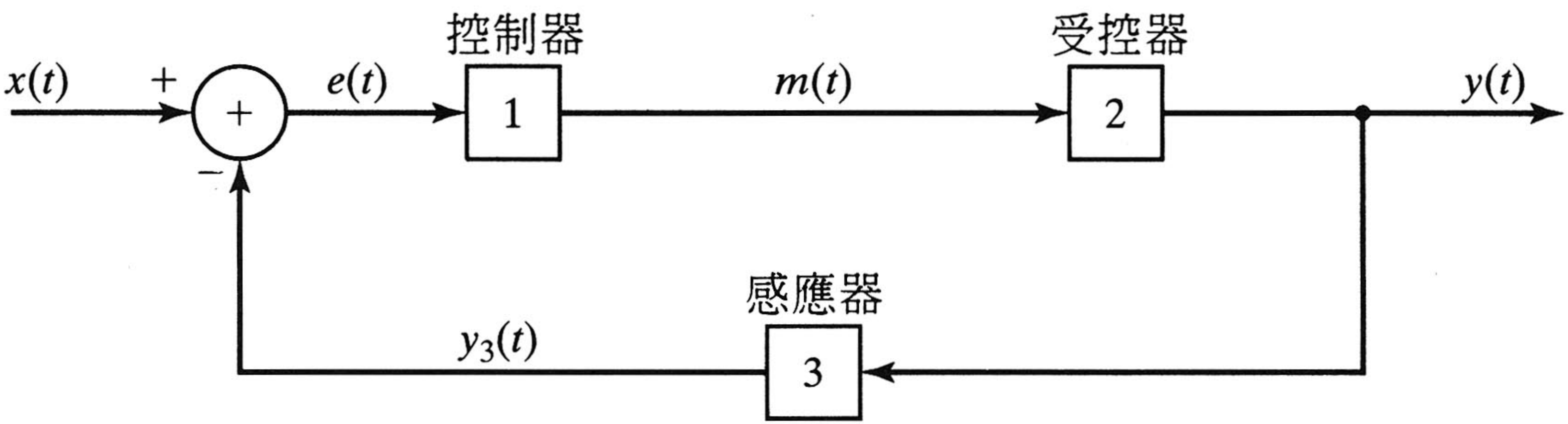


圖 2.38　回授控制系統

2.7 連續時間系統的特性

(properties of continuous-time system)

- **記憶性（memory）**
  一系統若其在時間t_0的輸出，$y(t_0)$，由$x(t_0)$以外的輸入決定之，則稱為記憶性系統。否則稱為非記憶性（memoryless）系統。記憶性系統也稱為動態系統（dynamic system）。
- **可逆性（invertibility）**
  一系統假如不同的輸入會產生不同的輸出，則稱為可逆性系統。
- **系統的反轉（inverse transformation）**
  一系統（ 表示為T_i ）的反轉為第二個系統（ 表示為），當與T系統串聯時會得到同一系統。

- 因果性 **(causality)**

  若一系統在時間t0時之輸出只與的t0之前的輸入有關，則稱為因果系統。

  因果系統又稱為非提前系統 (nonanticipatory system)。所有物理系統都為因果系統。

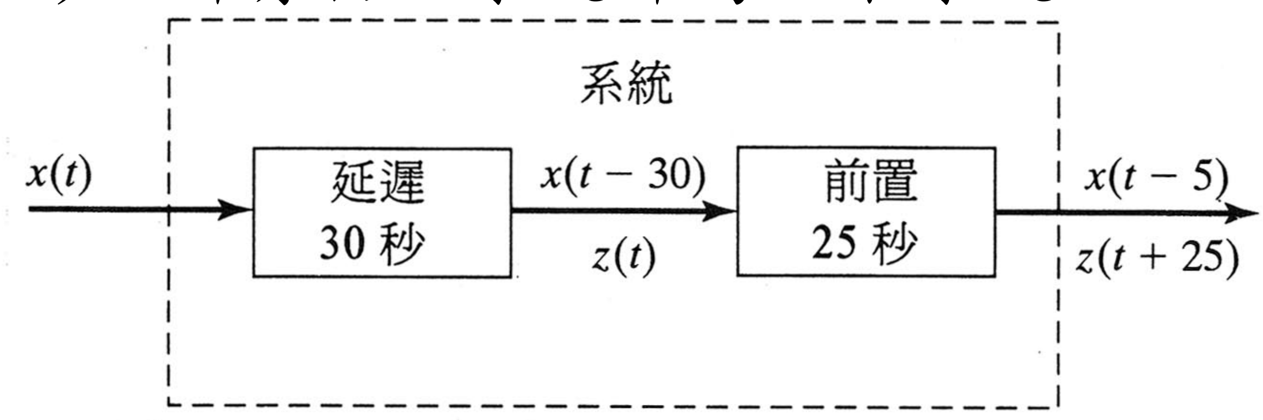


圖 2.41 不具因果性組件的因果系統

- 濾波器 (filter) 為一物理裝置，它從一信號中消除一些不要的成分 (component)。
- 如果一信號的過去值和未來值都為已知的話，我們將可以設計更好的濾波器。
- 在即時處理中，我們無法知道信號的未來值。但如果先記錄下來，再做濾波，則信號的未來值是可得的。
- 因此，若處理記錄的信號，我們將可以設計較好的濾波器；當然，此濾波就無法即時處理。

- **穩定性 (Stability)**
  BIBO穩定性
  若輸入是有界的，則輸出維持有界，此系統稱為穩定 (stable)。穩定性幾乎是所有物理系統必要的基本特性。一般而言，不穩定的系統是無法控制的，因此是沒有用的。

- **非時變性 (time invariance)**
  一系統中，若輸入信號經一時間位移t_0，則輸出信號亦產生同樣時間位移t_0，則此系統具非時變性。測試時間不變的方法為

- 例題：考慮一系統

$$y_d(t) = y(t)|_{x(t-t_0)} = e^{x(t-t_0)} = y(t)|_{t-t_0}$$

$$y(t) = e^{x(t)}$$

故此為非時變系統。

另一系統 $y(t) = e^{-t}x(t)$

$$y_d(t) = y(t)|_{x(t-t_0)} = e^{-t}x(t-t_0)$$

$$y(t)|_{t-t_0} = e^{-(t-t_0)}x(t-t_0)$$

上兩式不相等，因此此系統為時變系統。

- **線性 (Linearity)**

線性系統一系統稱為線性，倘若滿足下列兩個準則：

1. 加法性 (additivity)：若 $x_1(t) \to y_1(t)$ 且 $x_2(t) \to y_2(t)$ ，則

$$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$$

2. 均質性 (homogeneity)：若 $x_1(t) \to y_1(t)$ ，a為常數，則

$$ax_1(t) \to ay_1(t)$$

- 例題：平方電路

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) \to x_1^2(t) = y_1(t) \quad x_2(t) \to x_2^2(t) = y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \to [x_1(t) + x_2(t)]^2 = x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)$$

$$= y_1(t) + 2x_1(t)x_2(t) + y_2(t)$$

故平方電路不是線性系統。