

信號與系統

授課老師：孫火清老師

授課班級：日四技電機二甲

教科書：信號與系統精要，陳培文，高立圖書

課程內容

- 導論
- 連續時間信號與系統
- 連續時間線性非時變系統
- 傅立葉級數
- 傅立葉轉換
- 類比對數位取樣與轉換
- 離散時間信號與LTI系統
- Z轉換與DFT

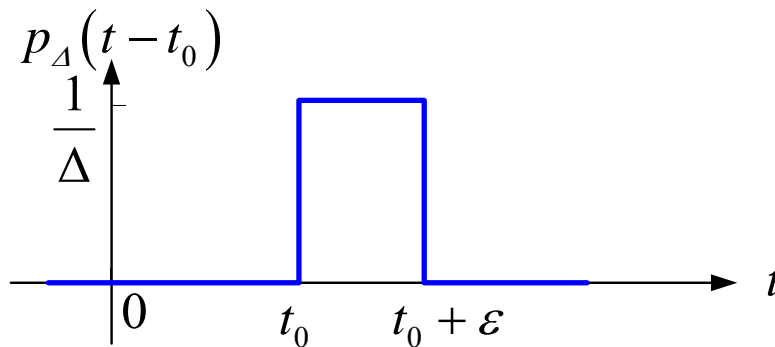
- 我們考慮線性非時變連續時間系統 (簡稱連續時間LTI) ，其理由如下：
 1. 許多物理系統可以LTI系統精確的描述。例如，由電阻、電容、電感所建立的電路為LTI模型
 2. LTI模型之數學方程式是可解的，不論是連續時間或離散時間系統都是如此。然而對非LTI模型，其數學方程式卻沒有一般性的解法。
 3. 在非LTI系統，我們常會用LTI模型作為初始階段的設計。LTI模型可能不是很精確，然而，它可為標準設計程序初始化。
 4. 有時候我們會將一般信號寫成一些函數的和 $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$ 系統的響應等於個別標準函數之響應的和， $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots$

3.1 連續時間信號的脈衝表示法 (Impulse Representation of Continuous-time)

- $X(t)$ 的脈衝函數表示

$$\begin{aligned}x_p(t) &= x(-\Delta) p_\Delta(t + \Delta) \Delta + x(0) p_\Delta(t) \Delta + x(\Delta) p_\Delta(t - \Delta) \Delta \\ &= \sum_{k=-1}^1 x(k\Delta) p_\Delta(t - k\Delta) \Delta \approx x(t)\end{aligned}$$

$$p_\Delta(t - t_0) = \frac{1}{\Delta} [u(t - t_0) - u(t - t_0 - \Delta)]$$

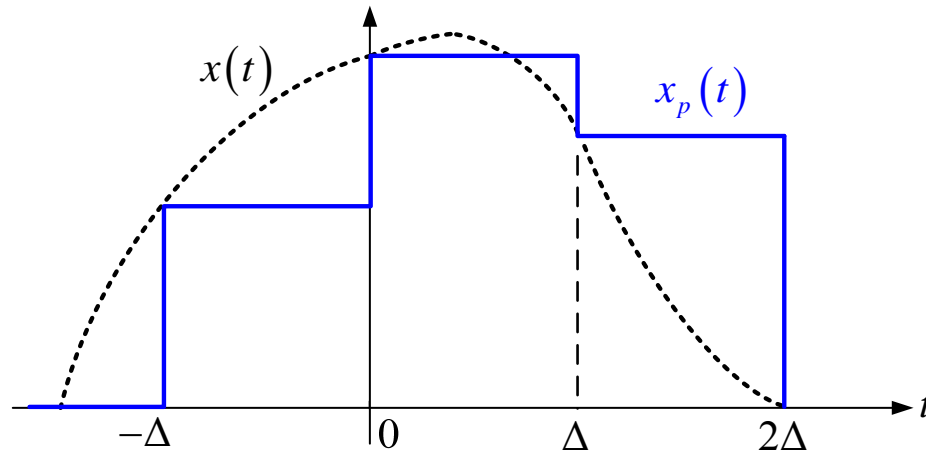


- 我們將此程序一般化， $x_p(t)$ 為

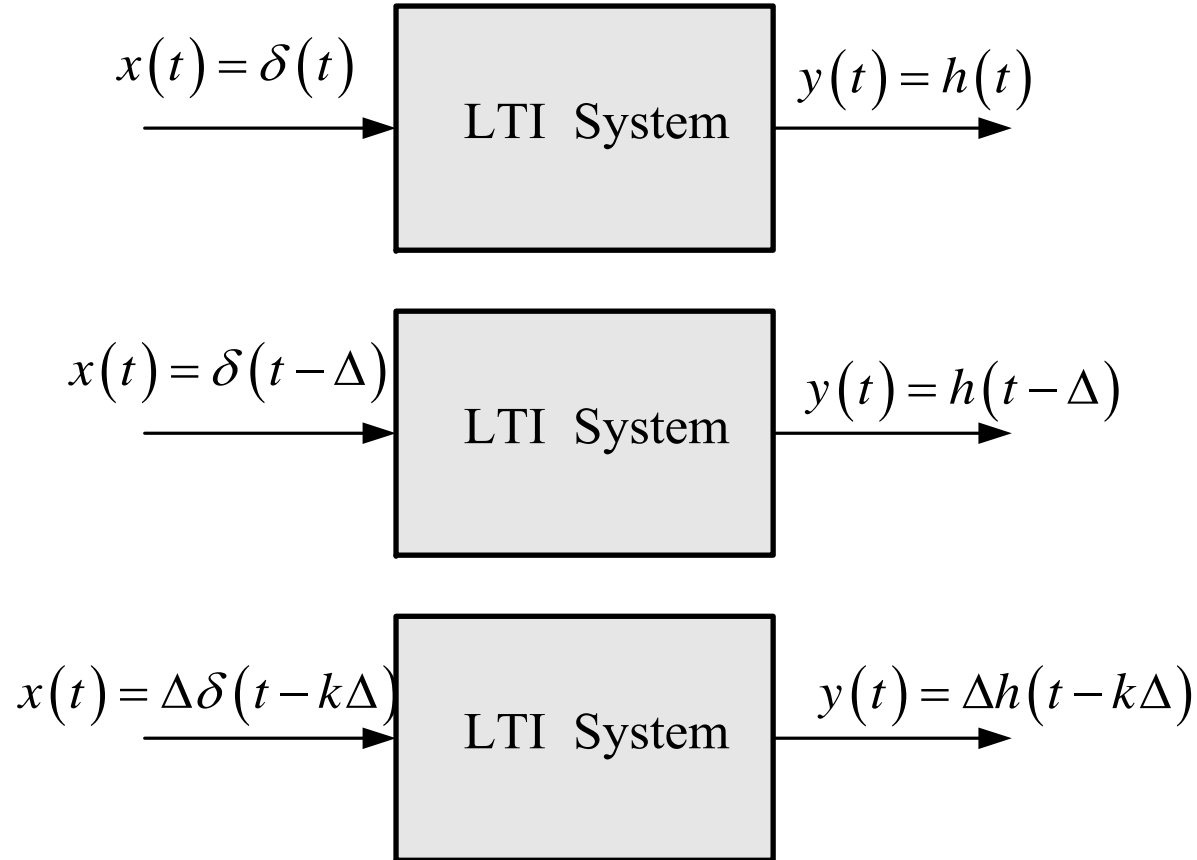
$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) p_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta \approx x(t)$$

當 Δ 趨近零， $k\Delta$ 趨近連續變數 τ ，且和變成積分，故式

(3.11) 成為 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$



3.2 連續時間LTI系統的迴旋積分 (Convolution for Continuous-Time LTI Systems)



- 系統是非時變的，故時間位移脈衝函數

$$\delta(t - t_0) \rightarrow h(t - t_0)$$

- 假如輸入是時間位移脈衝的加權和 (weighted, time-

shifted impulses)
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \delta(t - k\Delta)$$

則輸出為位移脈衝響應的和
$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta h(t - k\Delta)$$

● 輸入信號寫成
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = v(t)$$

如此可以推導輸出為
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

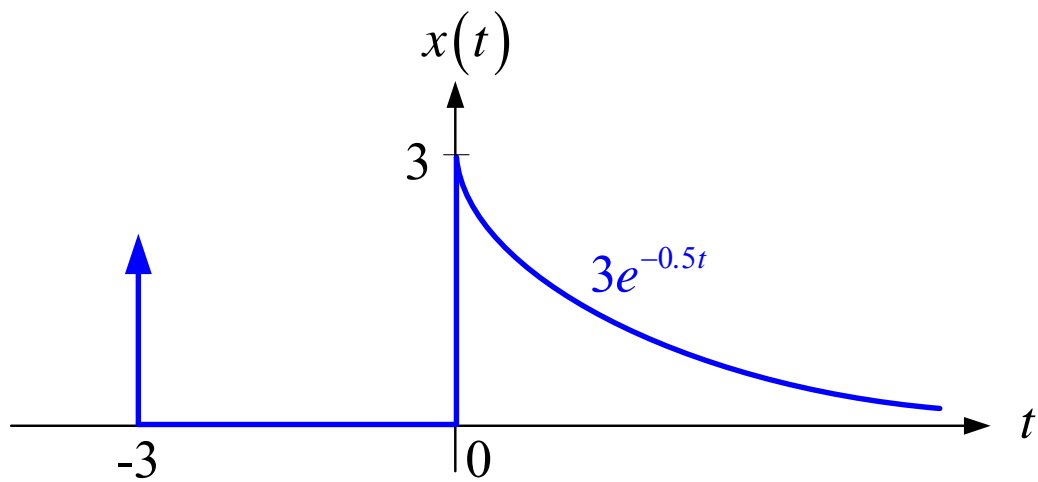
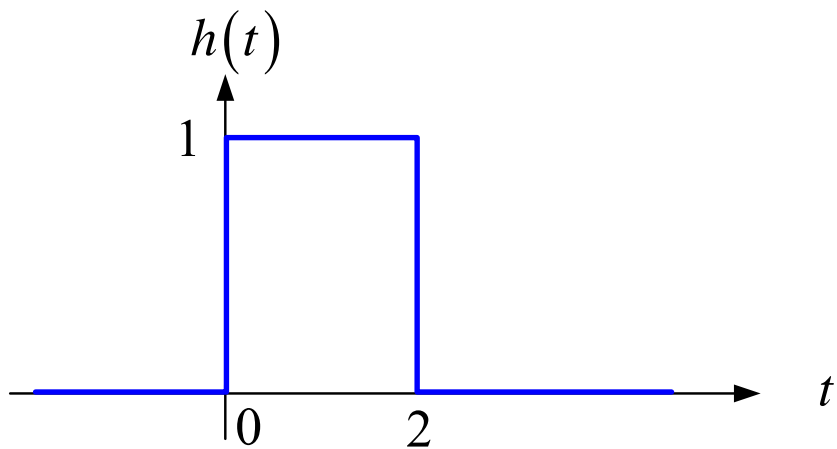
稱為迴旋積分 (convolution integral)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- 迴旋積分提供LTI系統之輸入 - 輸出關係的完整描述。假如脈衝響應已知，則任何輸入下的系統響應，均可求得。

- 例題3.5 矩形脈衝響應系統

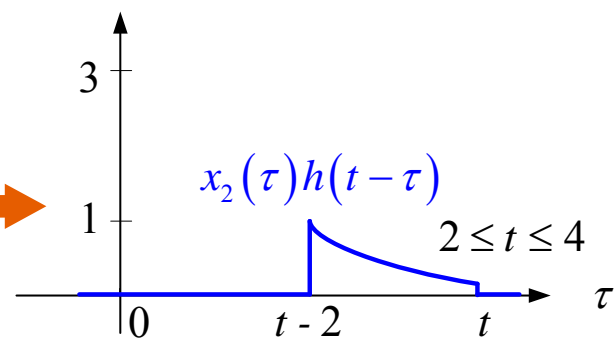
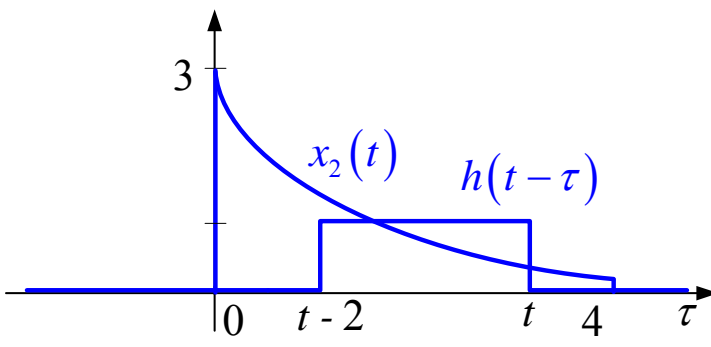
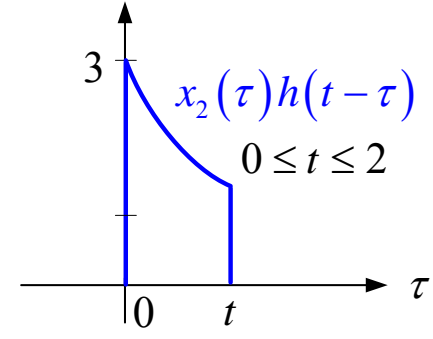
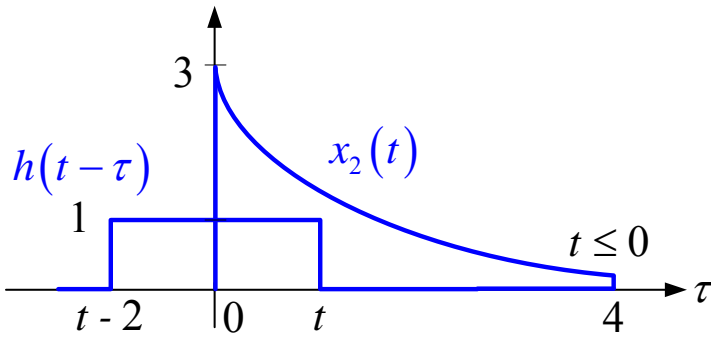
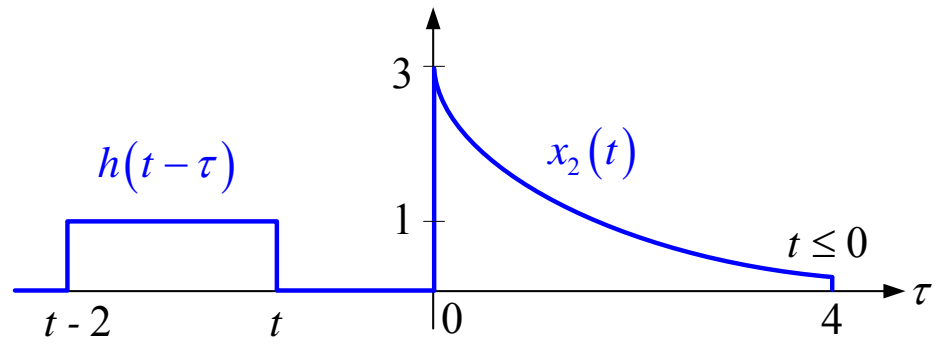
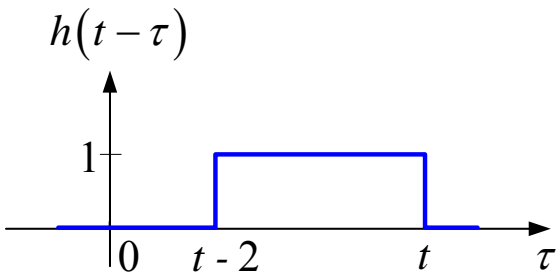


- 系統響應是兩個函數響應的和。

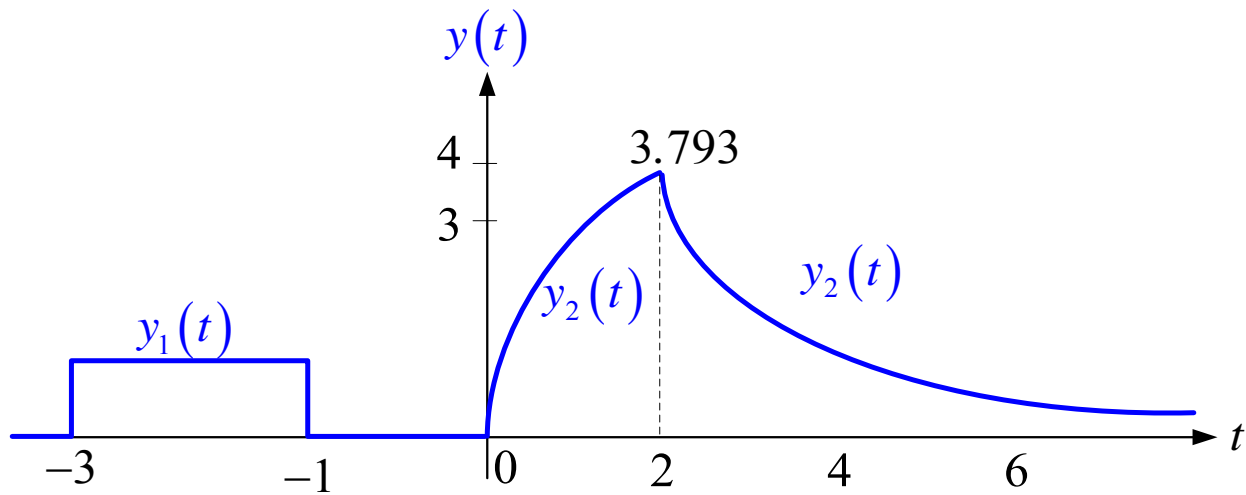
$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\}, \quad x(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = h(t) * \delta(t+3) = h(t+3) = u(t+3) - u(t+1)$$

- 欲決定 $y_2(t)$ 的響應，我們繪出圖3.12(a)。要得到迴旋積分，必須執行下列三個不同的積分：



- 在圖3.5中，時間軸分割成三個範圍。對每一個範圍，計算下列迴旋積分



3.3 迴旋積分的特性 (Properties of Convolution)

- 1. 交換性 (communicative property) :

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- 2. 結合性 (associative property) :

$$\begin{aligned} [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) &= x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \\ &= x(t) * [h_2(t) * h_1(t)] \end{aligned}$$

- 3. 分配性 (distrubuitve property) :

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

3.4 連續時間LTI系統的特性 (Properties of Continuous-Time LTI Systems)

- 無記憶系統 (Memoryless Systems)

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) K \delta(t_1 - \tau) d\tau = Kx(t_1)$$

- 可逆性 (Invertibility)

一脈衝響應之LTI系統，只有在可找得到滿足下式的函數時，才稱為可逆系統。

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

- 因果性 (Causality)：因果連續時間LTI系統，迴旋積分可以表示成兩種形態

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- 穩定性 (Stability)：一LTI系統若為BIBO穩定，則脈衝響應必須絕對可積分，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

- 單位步階響應 (Unit Step Response)

假設系統輸入為單位步階函數 $u(t)$ ，我們可得單位步階函數的響應

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t - \tau) d\tau$$

3.5 微分方程模型 (Differential-Equation Models)

- n 階固定係數的線性常微分方程式的一般式為

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

- 其中及為常數 $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ $a_n \neq 0$ 。我們限制這些為實數。這些方程式可以用更精簡的方式表示為

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- 微分方程式的解

通解 (general solution) 由兩個函數的和構成：

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

$Y_c(t)$ 為齊性解：將此解代入均勻方程式 [微分方程式右邊設為零]，以求需要的 s 值，又稱為自然響應。

$y_p(t)$ 維特解：與輸入函數 $x(t)$ 的形式有關，又稱為受迫響應。

- 自然響應 $y_c(t)$ 一定滿足這個方程式

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

- 特性方程式 (characteristic equation) 為

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 所以有 n 個 s 值滿足這個方程式，故 $y_c(t)$ 為

$$y_c(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \cdots + C_n e^{s_n t}$$

- 在固定係數線性常微分方程式的通解中的自然響應，與受力函數 $x(t)$ 是無關的；它只與系統結構有關，這是自然響應名稱的由來。它也叫做無受力響應 (unforced response)，或零輸入響應 (zero-input response)。此響應是一定存在的，不論輸入激發是那一種信號。
- 幾乎所有物理系統的LTI模型，其自然響應會隨時間增加而逼近零；但受迫響應會存在（此狀況發生在系統為BIBO穩定）。因為如此，我們有時候稱自然響應為暫態響應 (transient response)，而稱受迫響應為穩態響應 (steady-state response)。

3.6 自然響應中各項的說明 (TERMS IN THE NATURAL RESPONSE)

- 自然響應中各項的說明 (terms in the natural response)

$$y_c(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \cdots + C_n e^{s_n t}$$

- 實數 s_i
若 s_i 為實數，則自然響應為指數形式。

複數 s_i ，令

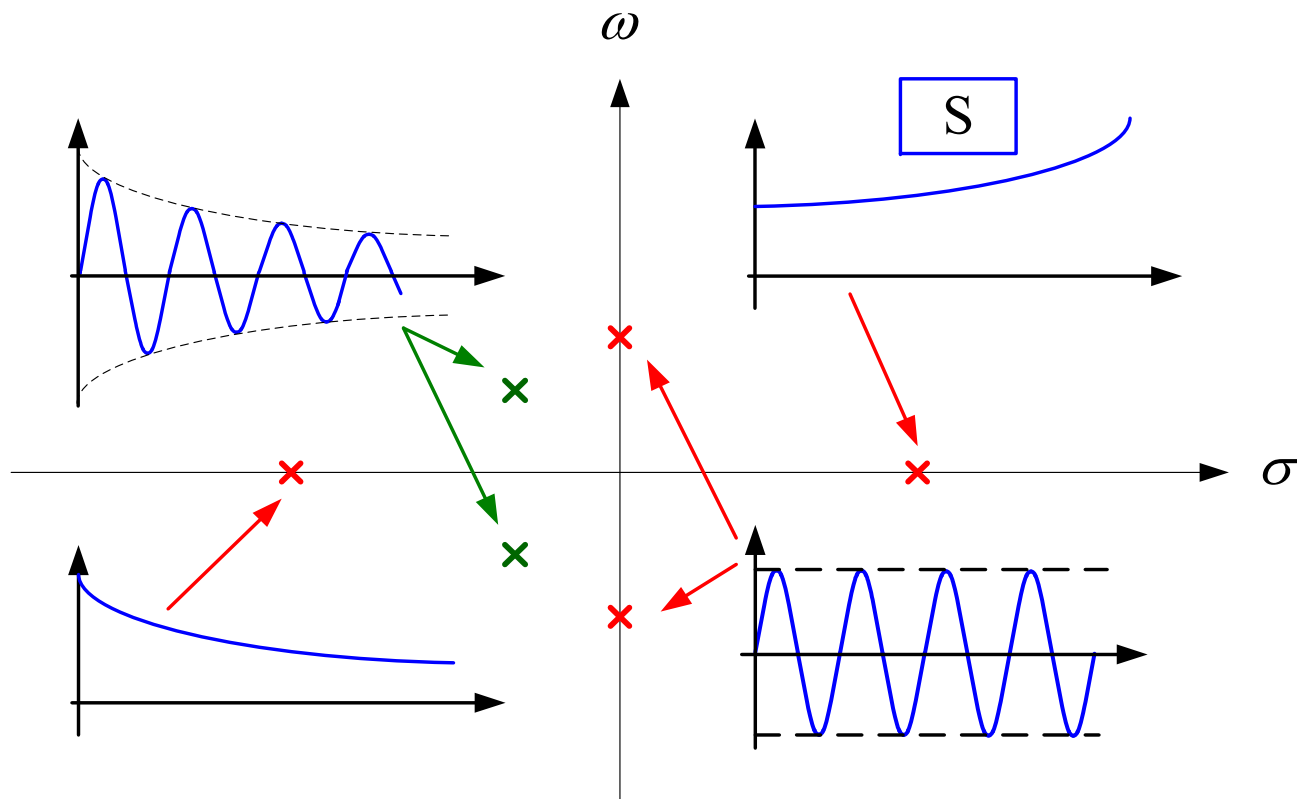
$$s_i = \sigma_i + j\omega_i$$

模態為

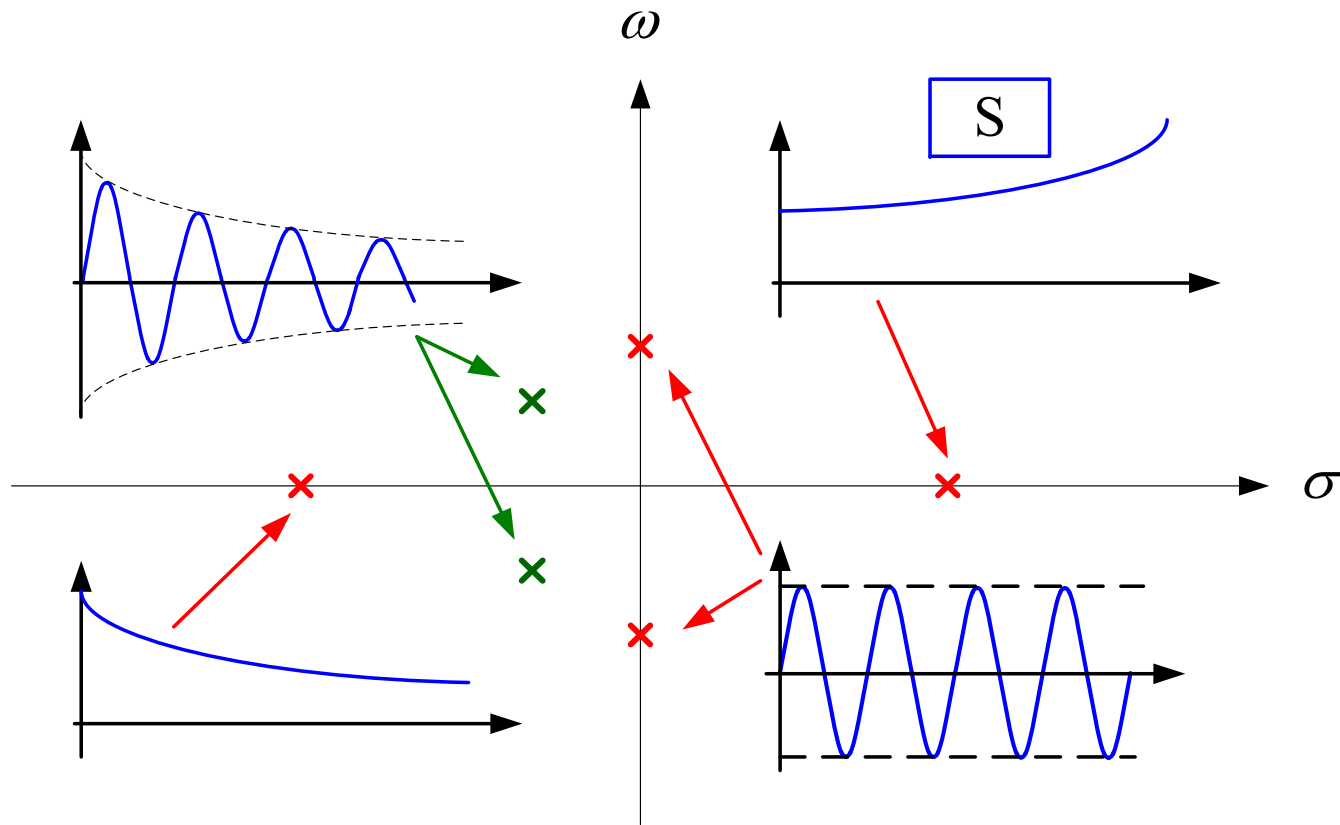
$$C_i e^{s_i t} - C_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = C_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$$

$$= 2 |C_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i)$$

- 特性方程式的實數根將產生自然響應的指數項，但複數根則產生弦波項。這些關係解釋於圖3.22，其中符號“ \times ”代表特性方程式之根的位置。



- 穩定度 (Stability)：因果連續時間LTI系統，其BIBO穩定的充要條件為：系統特性方程式的所有根，全部落在 s -平面的左半部。



■ Particular solution

$$x(t) \quad y_p(t)$$

$$t^N \quad C_1 t^N + C_2 t^{N-1} + \dots + C_N$$

$$e^{at} \quad \begin{aligned} & C e^{at}, \quad \text{if } a \text{ is not a root of } f(r) \\ & C_1 t e^{at} + C_2 e^{at}, \quad \text{if } a \text{ is a single root of } f(r) \\ & C_1 t^{k-1} e^{at} + C_2 t^{k-2} e^{at} + \dots + C_k e^{at}, \\ & \quad \text{if } a \text{ is a } (k-1) \text{ multiple root of } f(r) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha t) \quad C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)$$

$$\sin(\alpha t) \quad C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)$$

3.7 複數指數輸入的系統響應

(System Response for Complex-Exponential Inputs)

- 就LTI系統，對於複數之指數輸入的響應為

$$x(t) = Xe^{st}$$

固定係數線性常微分方程式，在複數指數輸入下，我們可以找到受迫響應。

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

的受迫響應（穩態響應）為 $y_{ss}(t) = Ye^{st}$

- 將其代入，微分方程式為

$$a_0 y_{ss}(t) = a_0 Y e^{st}$$

$$b_0 x(t) = b_0 X e^{st}$$

$$a_1 \frac{dy_{ss}(t)}{dt} = a_1 s Y e^{st}$$

$$b_1 \frac{dx(t)}{dt} = b_1 s X e^{st}$$

$$a_2 \frac{d^2 y_{ss}(t)}{dt^2} = a_2 s^2 Y e^{st}$$

$$b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = b_2 s^2 X e^{st}$$

⋮

⋮

$$a_n \frac{d^n y_{ss}(t)}{dt^n} = a_n s^n Y e^{st}$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} = b_m s^m X e^{st}$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y e^{st}$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) X e^{st}$$

- 消去指數部份可得

$$Y = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \right] X = H(s)X$$

- 多項式比例的標準型為

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

此函數 $H(S)$ 稱為 n - 階轉移函數 (transfer function) 。

- 系統微分方程式可以直接由轉移函數得出；因此， $H(s)$ 是系統輸入 - 輸出的完整描述，不論輸入函數為何。
- 因為這個理由，LTI系統可用圖3.24的方塊圖表示之（轉移函數置於方塊中）。

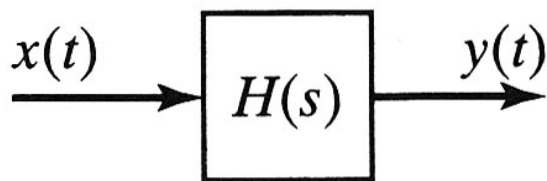


圖 3.24 LTI 系統

- 脈衝響應 (Impulse Response)

如前述，LTI系統的脈波響應為 $h(\cdot)$ ，轉移函數為 $H(s)$ 。我們將證明與直接相關，而可以直接由計算而得。

- 脈衝響應為與轉移函數的關係為

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

表3.1 LTI系統的輸入輸出函數

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$Xe^{s_1 t} \rightarrow XH(s_1) e^{s_1 t} ; \quad X = |X| e^{j\phi}$$

$$|X| \cos(\omega_1 t + \phi) \rightarrow |X| |H(j\omega_1)| \cos[\omega_1 t + \phi + \underline{\angle H(j\omega_1)}]$$

- 表3.1 LTI系統的輸入輸出函數

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$Xe^{s_1 t} \rightarrow XH(s_1) e^{s_1 t}; \quad X = |X| e^{j\phi}$$

$$|X| \cos(\omega_1 t + \phi) \rightarrow |X| |H(j\omega_1)| \cos\left[\omega_1 t + \phi + \angle H(j\omega_1)\right]$$

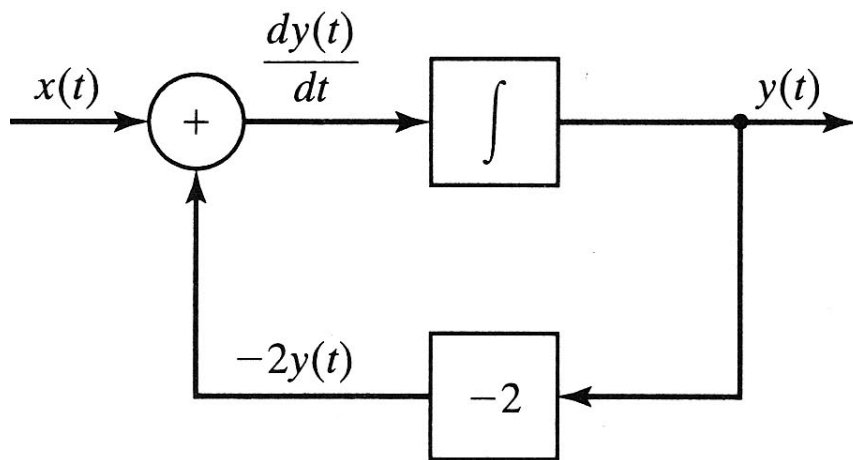
3.8 方塊圖 (Block Diagrams)

- 方塊圖除了表示輸入 - 輸出關係外，也表達系統的內部結構。
- 本節發展的程序包括：找一個方塊圖，構建一特定元件，如積分器，以滿足給定的微分方程式。以下用一個例子來說明此一程序。
- 一階LTI系統的模擬圖

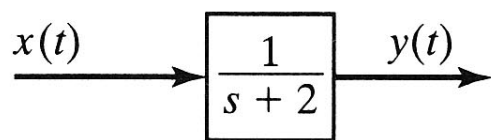
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

將微分方程式寫成 $\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + x(t)$

- 在例題中，微分方程式的方塊圖，建築在積分器上，係用於構建一階微分方程式。



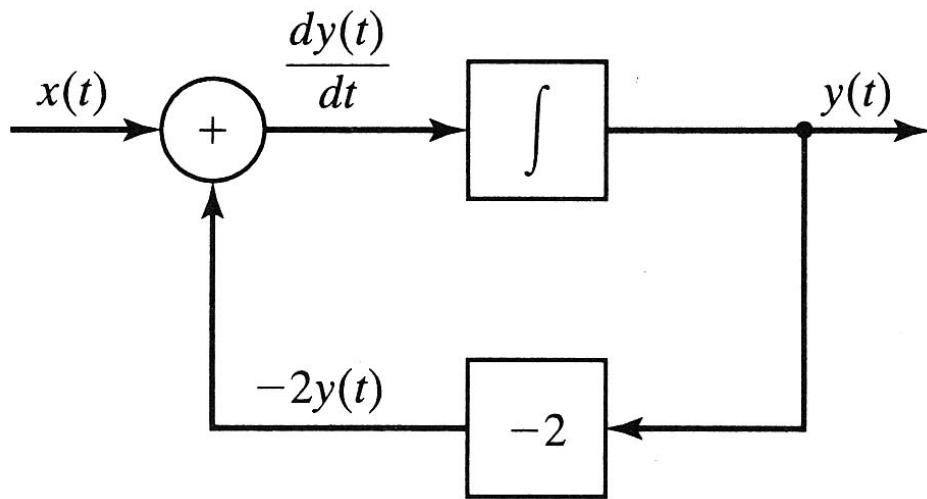
(a)



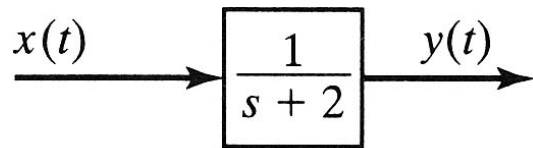
(b)

圖 3.28 例題 3.19 的系統

- 圖3.28(a) 顯示，構建這類方塊圖包含三個元件：
 1. 積分器；
 2. 加總裝置（圓形）；
 3. 增益裝置（增益為的方塊）。
- 圖3.28(a) 的方塊圖有時候稱為模擬圖。不管是類比模擬或數位模擬，其構建程序的第一步是畫出以積分器為基礎的模擬圖。
- 也可以用微分器來建構模擬圖。然而，我們通常不用微分器。微分器會放大高頻雜訊，但積分器放大低頻雜訊。一般而言，高頻雜訊較低頻雜訊多。



(a)



(b)

圖 3.28 例題 3.19 的系統

- 首先要說明的是，就微分方程式而言並沒有唯一的模擬圖。我們可以證明，一微分方程式會有無數的模擬圖。於此，我們只提出兩種標準模擬圖。
- 為發展兩種標準模擬圖，我們首先考慮 n -階微分方程式。然後，發展 n -階微分方程式的模擬圖。

- 直接形式I (Direct form I)

$$a_2 y(t) + a_1 y_{(-1)}(t) + a_0 y_{(-2)}(t) = b_2 x(t) + b_1 x_{(-1)}(t) + b_0 x_{(-2)}(t)$$

我們把方程式的右側表示為

然後以圖3.29(a) 的方塊圖來實現

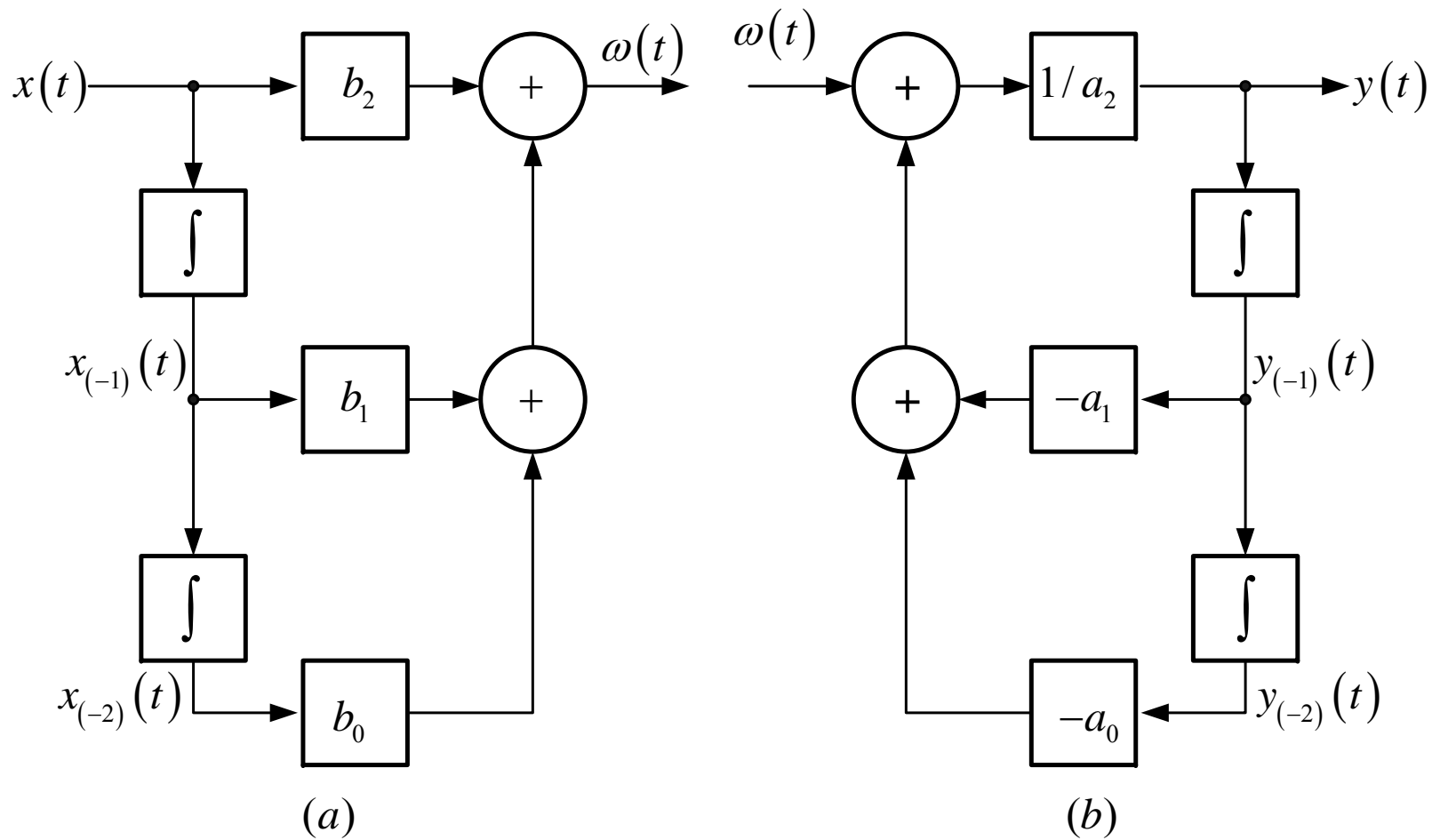
此時式 (3.87) 將成為

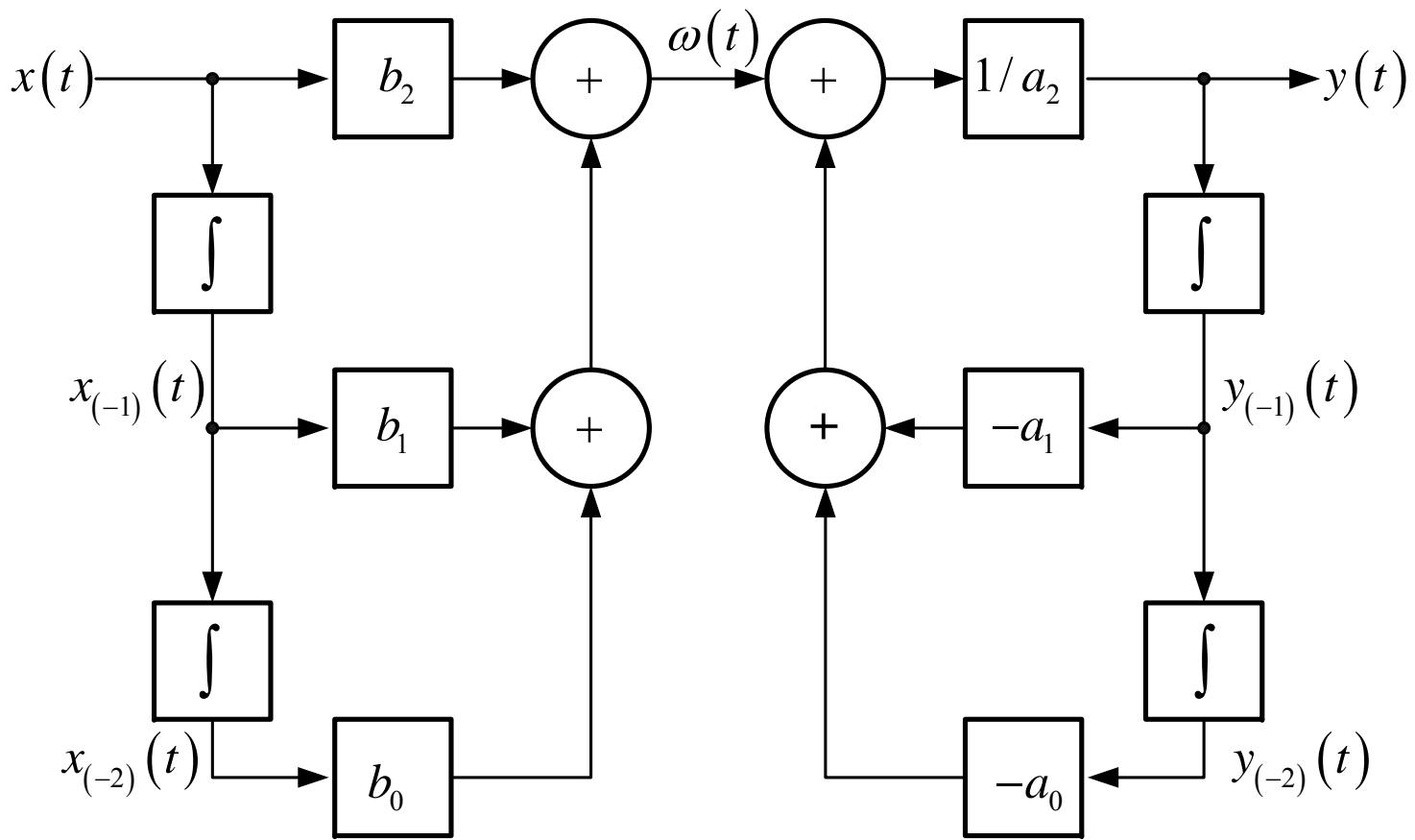
$$a_2 y(t) + a_1 y_{(-1)}(t) + a_0 y_{(-2)}(t) = \omega(t)$$

- 求解此方程式可得

$$y(t) = \frac{1}{a^2} [\omega(t) - a_1 y_{(-1)}(t) - a_0 y_{(-2)}(t)]$$

- 此方程式用圖3.29(b)的系統來實現。整體實現結果為圖3.29(a)與圖3.29(b)的串聯，如圖3.29(c)。稱為直接形式I實現，或直接形式I模擬圖。



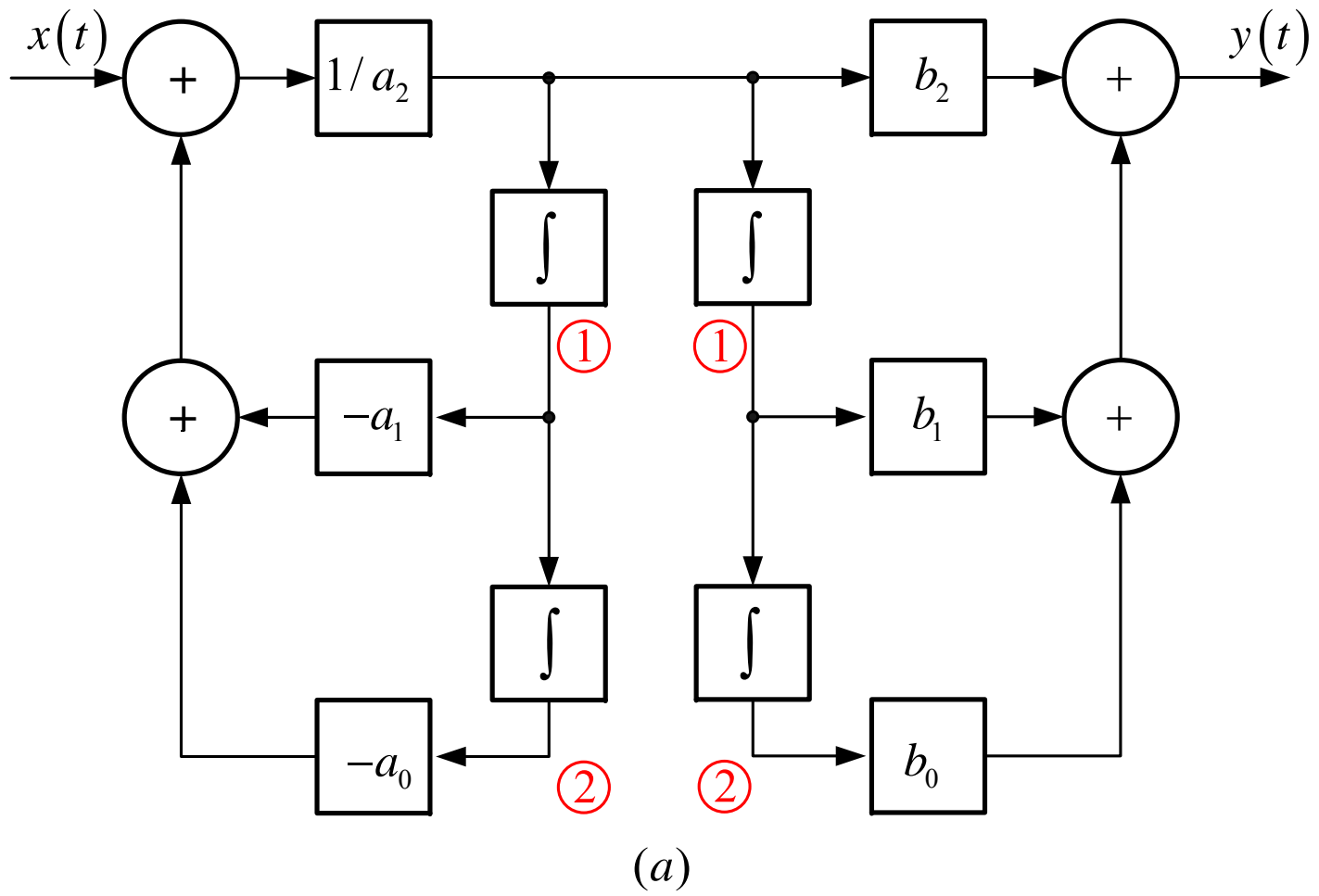


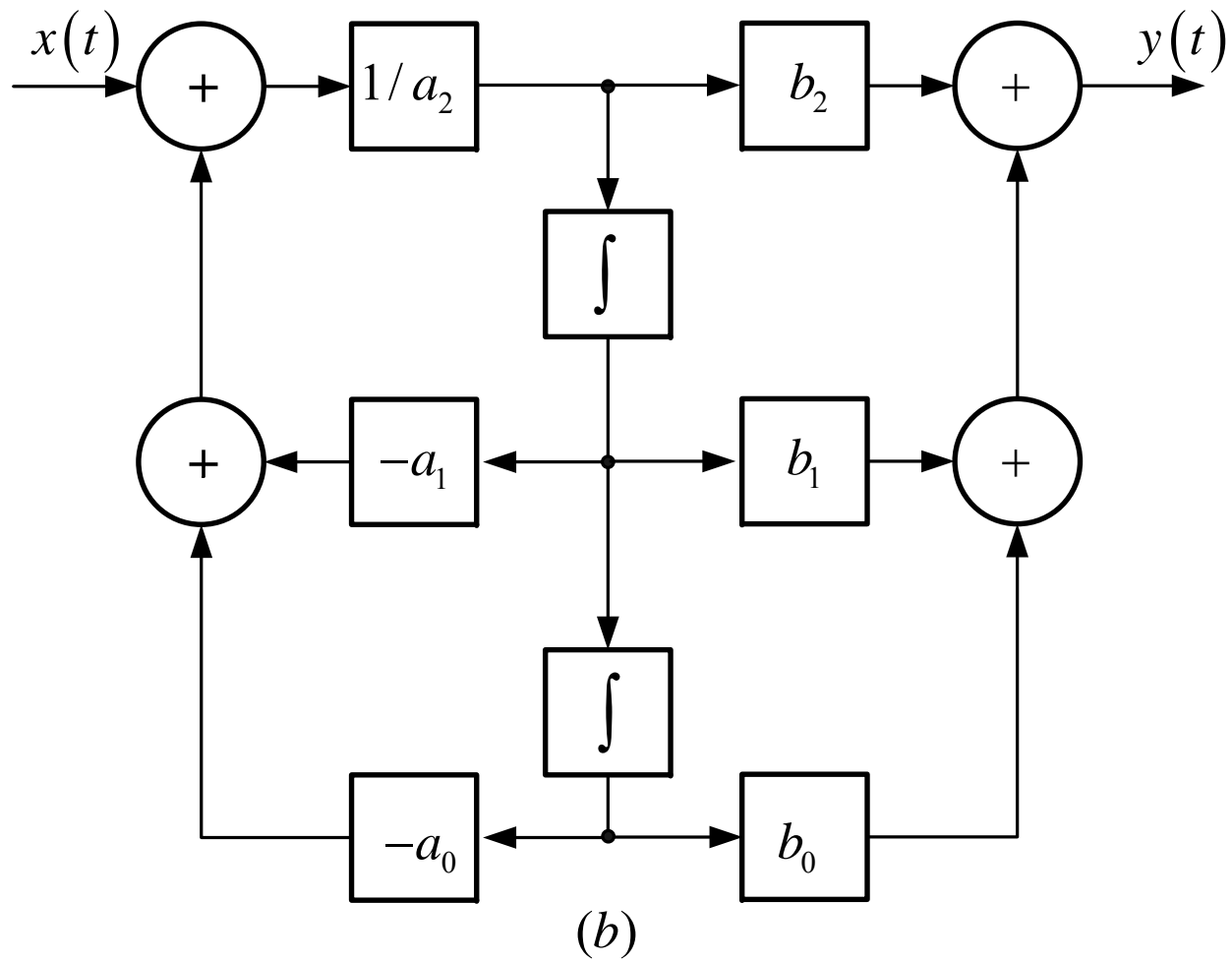
(c)

- 直接形式II (Direct form II)

1. 因為此系統為線性，兩級順序對調不會影響輸入 - 輸出特性 (見圖3.13)；對調的結果如圖3.30(a)。

2. 在此圖中同樣信號被兩組串聯的積分器整合在一起；所以，標示1的積分器的輸出相等，標示2的積分器的輸出也相等。因此，串聯積分器的其中一組可被去除。



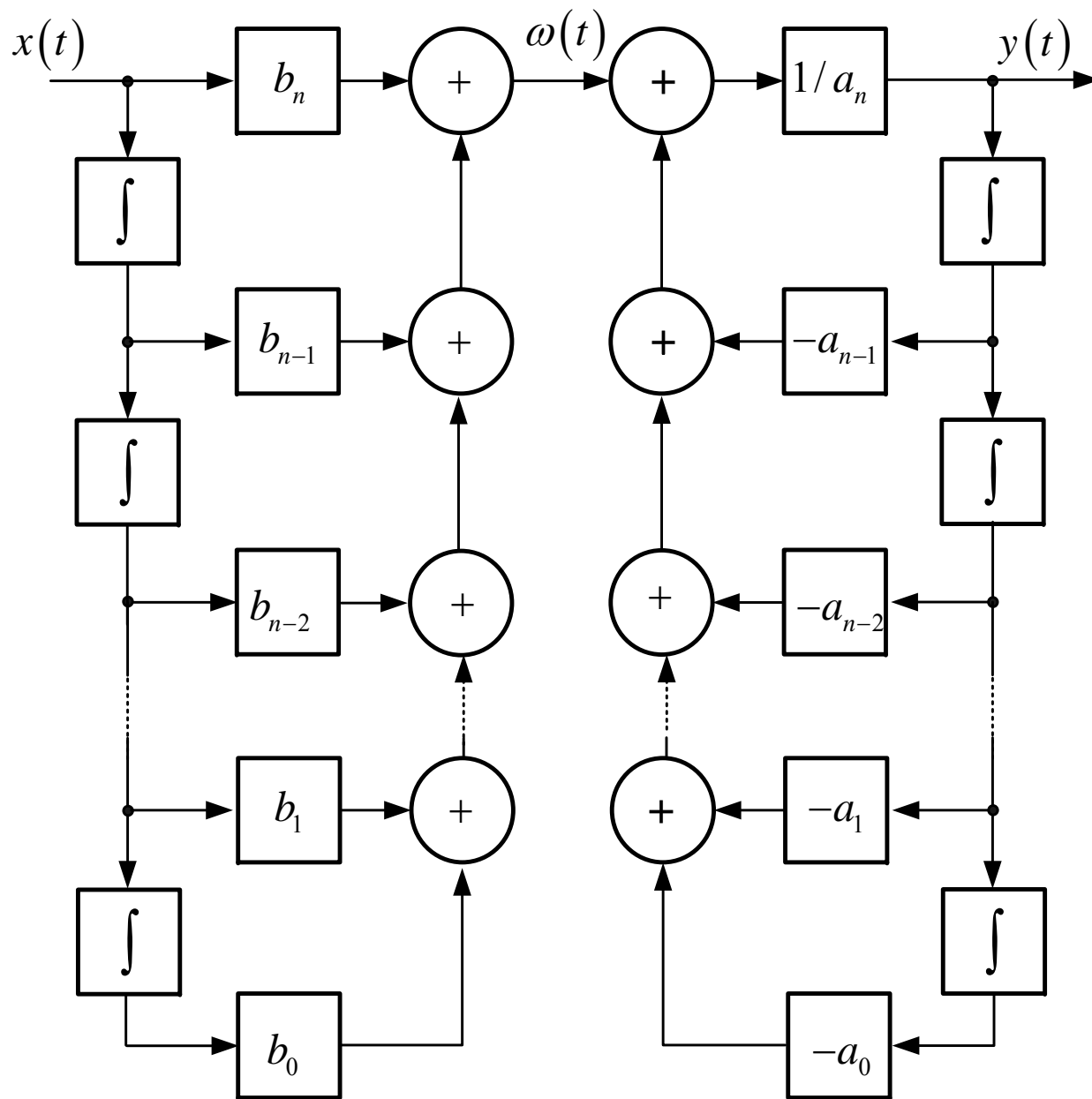


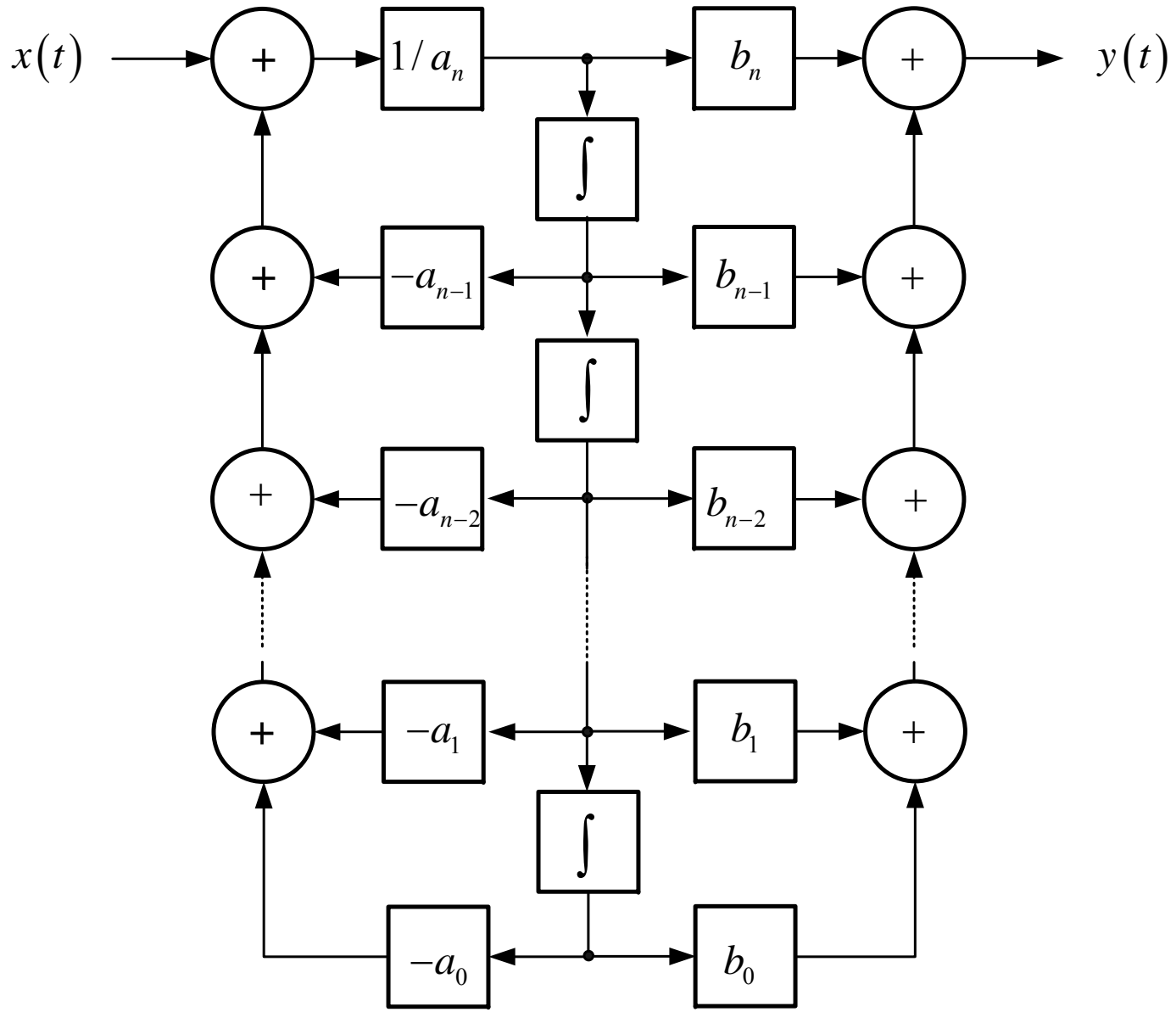
- n - 階實現 (n th-Order Realization)

再度考慮 n - 階微分方程式：

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

利用前述 n - 階系統的程序，我們繪出在下的直接形式 I 與直接形式 II 之模擬圖，如圖 3.31 與圖 3.32。





- n -階微分方程式至少要 n 個積分器。若使用 n 個積分器，則為最少實現 (minimal)；其它情況稱為非最少實現 (nonminimal)。直接形式I 為非最少實現，但直接形式II 為最少實現。
- 形式I 與形式II 對一般性系統，在概念上是有用的；然而在寫系統模擬時這兩個形式很少被用到。取而代之的是：建構每一積分器的輸出是一物理變數，且愈多愈好。這個主題將在第8章進一步討論。
- 我們可以使用積分器或微分器，或二者之混合來建構模擬。然而，微分器會放大高頻雜訊，也因為是這個雜訊問題，我們儘量避免使用微分器。

3.9 拉式轉換 (Laplace Transform)

- 拉式轉換 $F(s)$ 定義為時間函數 $f(t)$ 的積分

$$\mathcal{L}_b\{f(t)\} = F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.89)$$

- 式(3.89) 稱為對稱 (bilateral) 或雙邊 (two-side) 拉式轉換，以下標 b 表示。
- 反拉式轉換為

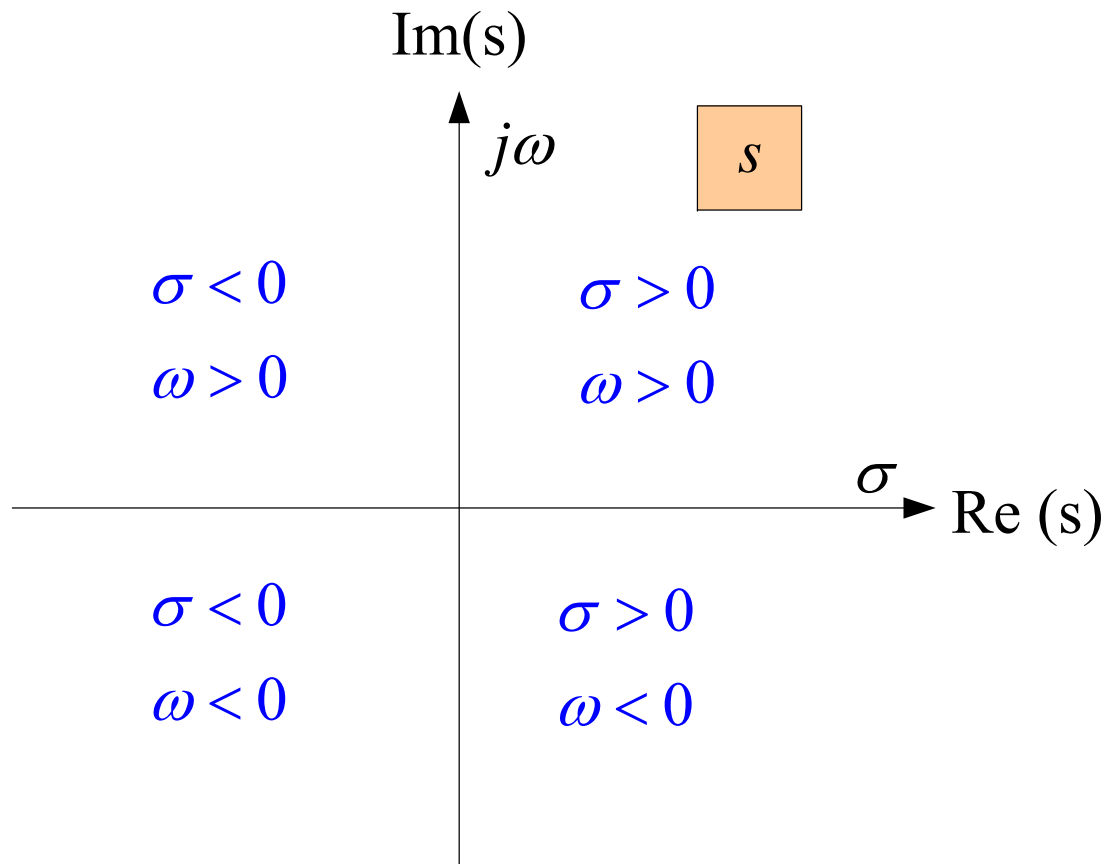
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad j = \sqrt{-1} \quad (3.92)$$

- 單方 (unilateral) 或單邊 (single-side) 拉式轉換

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.91)$$

此轉換通常簡稱為拉式轉換

- 拉式轉換之變數 s 為複數，我們將實部記為 σ ，
虛部記為 $j\omega$ ，即 $s = \sigma + j\omega$
，通常稱為 s 平面。
- 函數的拉式轉換可以表示為 $f(t) \xleftrightarrow{\text{laplace}} F(s)$



範例 (Examples)

- EX 3.20 單位步階函數之拉式轉換

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{-1}{s} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} - 1 \right]$$

因此單位步階函數的拉式轉換，只有在 s 的實部大於 0 時才會存在。我們記為

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

● Ex 3.21 指數函數之拉式轉換

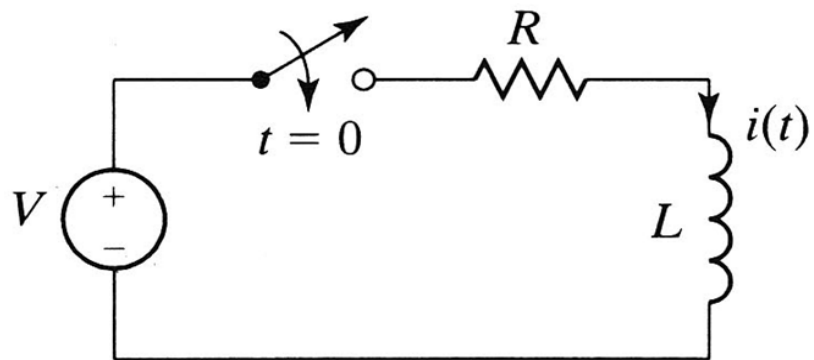
$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{-1}{s+a} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} - 1 \right] \end{aligned}$$

此轉換只有在 $\text{Re}(s+a)$ 為正值時才會存在，因此

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s+a) > 0$$

- Ex 3.22 用拉式轉換求解一個簡單電路的電流。考慮下圖之 RL 電路，其中 V 為常數。此迴路之方程式為

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = Vu(t), \quad t > 0$$



兩邊取拉式轉換

$$\mathcal{L}[sI(s) - i(0^+)] + RI(s) = \frac{V}{s}$$

求解，得到

$$I(s) = \frac{V}{s(Ls + R)} = \frac{V/L}{s(s + R/L)}$$

$I(s)$ 的反拉式轉換即為電流 $i(t)$ ， $t > 0$ 。我們可以將展開

$$I(s) = \frac{V/L}{s(s + R/L)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + R/L}$$

由部份分式求解 a, b

可以得出

$$I(s) = \frac{V/R}{s} - \frac{V/R}{s + R/L}$$

我們再合併上式，得到為

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}), \quad t > 0$$

因此我們用拉式轉換求出了一個微分方程式的解。

由上述範例，我們要注意下列幾點：

1. 常係數微分方程式被轉換為代數方程式。
2. 代數方程式解得 $\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$ ，為變數 s 之拉式轉換。
3. 我們利用拉式轉換表求反拉式轉換，而不用複數反積分式。
4. 通常用部分分式將複雜的 s 函數化減為表中列出之比較簡單的拉式轉換項次。
5. 拉式轉換求解微分方程式，不需要將其通解分為齊次解與特解；而可以直接求得通解。

表3.2 拉式轉換對

$$\text{step fun., } u(t), 1 \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t^n \rightarrow \frac{n}{s^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$te^{at} \rightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$t^n e^{at} \rightarrow \frac{n}{(s-a)^{n+1}}$$

$$e^{at} \sin(bt) \rightarrow \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$e^{at} \cos(bt) \rightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\frac{d^k f(t)}{d^{tk}} \rightarrow s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt \rightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t) dt$$

$$\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow \frac{s + \alpha}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\frac{1}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-at} \sin(\omega t - \phi)$$

$$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}) \rightarrow \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{s[(s-a)^2 + \omega^2]}$$

$$\sin(at) \rightarrow \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$$

$$\cos(at) \rightarrow \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$1 - \cos(at) \rightarrow \frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

$$at - \sin(at) \rightarrow \frac{a^3}{s^2(s^2 + a^2)}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$t \sin(at) \rightarrow \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$t \cos(at) \rightarrow \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$u(t-a) \rightarrow \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\delta(t-a) \rightarrow e^{-as}$$

名稱	性質
1. 線性	+ $[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
2. 導數	+ $\left[\frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0^+)$
3. n 階導數	+ $\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \dots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$
4. 積分	+ $\left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$
5. 實數移位	+ $[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$
6. 複數移位	+ $[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
7. 初值	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
8. 終值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
9. 乘以 t	+ $[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
10. 時間轉換 ($a > 0; b \neq 0$)	+ $[f(at-b)u(at-b)] = \frac{e^{-bs/a}}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
11. 迴旋積分	+ $[F(s) F_1(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
12. 時間週期性	+ $[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s)$, 其中 $[f(t) = f(t+T)], t \geq 0$ $F_1(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

利用拉式轉換求得LTI系統之響應

- 初始條件 (Initial Conditions)

考慮圖3.34(a)之 RL 電路，此迴路方程式為

$$\frac{di(t)}{dt} + i(t) = v(t)$$

其方程式之拉式轉換為

$$sI(s) - i(0^+) + I(s) = V(s)$$

求解其轉換電流，得到

$$I(s) = \frac{V(s) + i(0^+)}{s + 1}$$

我們現在令圖3.33(a)之電源為脈衝函數，電流 $i(t)$ 為

$$I(s) = \frac{A_0 + i(0^+)}{s + 1} \Rightarrow i(t) = [A_0 + i(0^+)] e^{-t}$$

此電流示於圖3.34(b)。

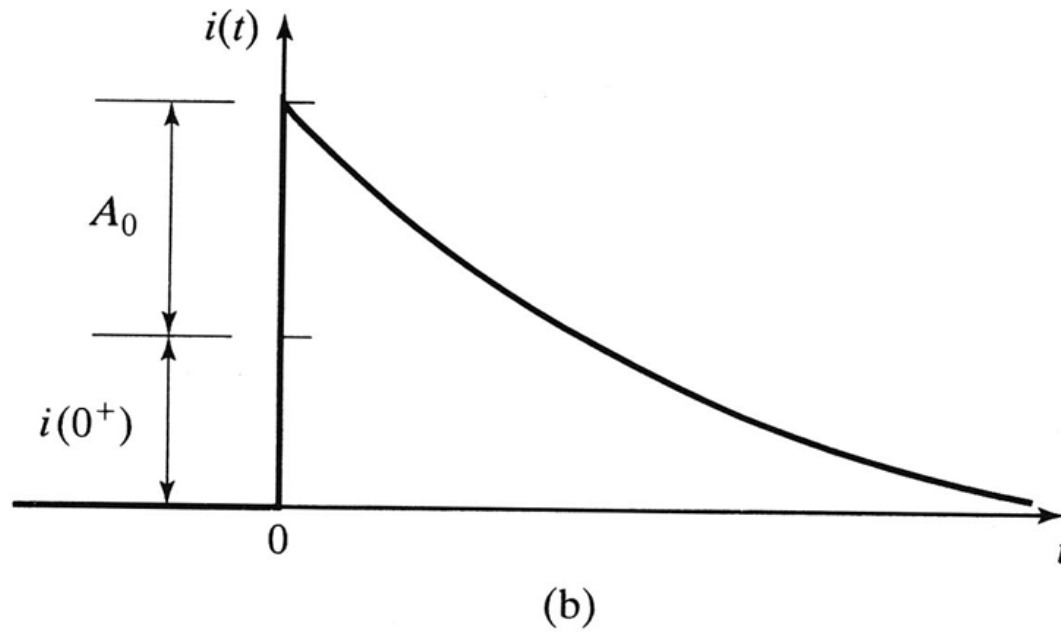
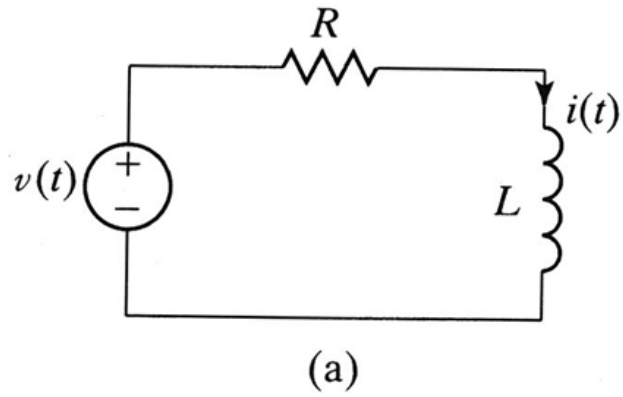


圖 3.34 (a) RL 電路與 (b) 響應。

- 轉換函數 (Transfer Functions)

我們喜歡以線性常係數微分方程式描述連續時間物理系統。此模型為線性非時變 (見3.5節)。n階LTI模型之一般方程式為

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- 我們現在推導轉換函數模型，由微分性質

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+)$$

- 當我們推導轉換函數時，必須忽略初始條件，因為具有初始條件之系統，為非線性系統。轉換函數顯示線性系統之輸入與輸出信號之間的關係，故其微分性質為

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right] = s^k F(s)$$

我們以此性質轉換式

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^k X(s)$$

- 展開此方程式，有

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] Y(s) \\ = [b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0] X(s) \end{aligned}$$

因此轉換函數模型為

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- 例題3.23：以拉式轉換求LTI系統之響應

再度考慮圖3.34(a)之 RL 電路，此迴路方程式為

$$\text{轉換函數為 } 0.5 \frac{di(t)}{dt} + 4i(t) = v(t)$$

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{0.5s + 4}$$

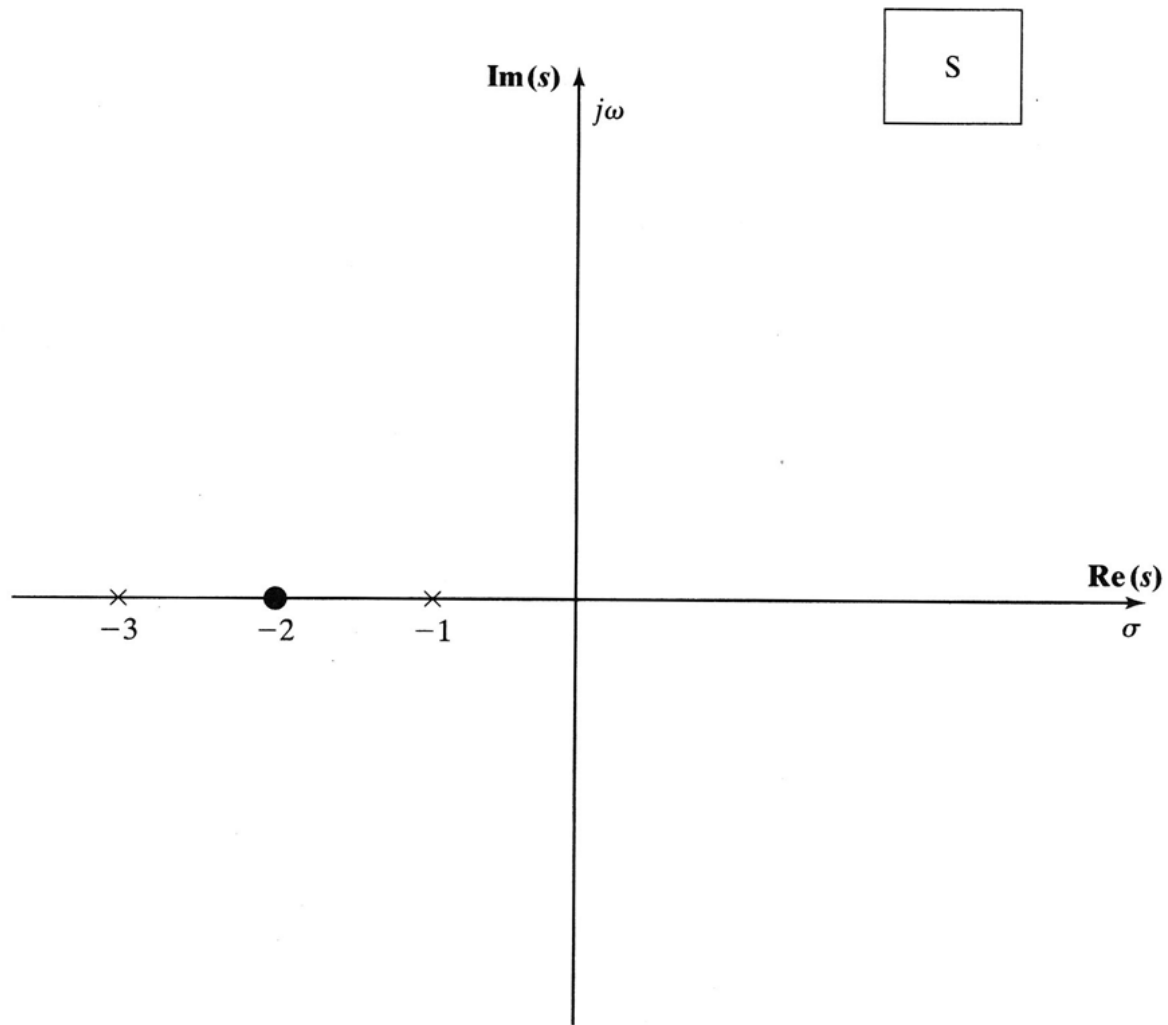
- 例題3.24：轉換函數之極點與零點
一轉換函數之型式為

$$H(s) = \frac{4s + 8}{2s^2 + 8s + 6}$$

此轉換函數表示為

$$H(s) = \frac{2(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)}$$

我們現在看出此轉換函數於 $s = -2$ 有一個零點，有兩個極點位於 $s = -1$ 與 $s = 3$ 。極點與零點繪於圖3.35。標準的作法以符號 \circ 表示零點，以符號 \times 表示極點。



3.35

- 迴旋積分 (Convolution)

迴旋積分為

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

我們只考慮因果系統，迴旋積分可以表示為

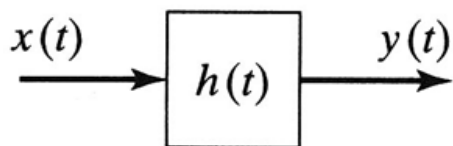
$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(\tau) h(t - \tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) u(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

- 我們看到時域中之迴旋積分，轉換到頻域 s 之後，變為相乘的關係。

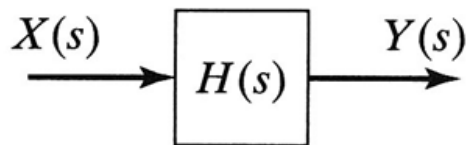
$$\begin{aligned}\mathcal{L} [x(t) * h(t)] &= \int_0^{\infty} x(\tau) H(s) e^{-s\tau} d\tau \\ &= H(s) \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) X(s)\end{aligned}$$

- 迴旋積分的結果為LTI系統之響應，如圖3.36(a)

$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow Y(s) = H(s) X(s)$$



(a)



(b)

圖 3.36 LTI 系統

- 我們可以看出，轉換函數 $H(s)$ ，即為系統脈衝響應之拉式轉換：

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- 結果我們可以用三個數學關係說明LTI連續時間系統：
 1. 系統之微分方程式；
 2. 系統轉換函數 $H(s)$ ；
 3. 系統脈衝響應函數 $h(t)$ 。

- 複數極點之轉換 (Transforms with Complex Poles)

接下來我們考慮一個具有一對複數極點轉換函數。假設 $F(s)$ 為 n 階，具有兩個複數極點，為了方便，我們令其他個極點為實數，於是

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_n)}$$

- 其部分分式表示可以寫為

$$F(s) = \frac{k_1}{s-a+jb} + \frac{k_2}{s-a-jb} + \frac{k_3}{s-p_3} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

- 我們由下列二式計算 k_1 與 k_2 ，

$$k_1 = (s - a + jb) F(s) \Big|_{s=a-jb} = |k_1| e^{j\theta}$$

$$k_2 = (s - a - jb) F(s) \Big|_{s=a+jb} = |k_1| e^{-j\theta}$$

- 令 $f_1(t)$ 為前兩項之反轉換的和：

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2|k_1| e^{at} \left[\frac{e^{-j(bt-\theta)} + e^{j(bt-\theta)}}{2} \right] \\ &= 2|k_1| e^{at} \cos(bt - \theta) \end{aligned}$$

- 含有重複極點之函數 (Functions with Repeated Poles)

3.10 LTI系統之特性 (LTI Systems Characteristics)

- 因果性 (Causality)

函數之單邊拉式轉換，其值於 $t < 0$ 時必須為0。故單邊拉式轉換只能用於具因果性的系統。

- 穩定性 (Stability)

n 階系統之轉換函數表示為

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

系統的特性方程式是將轉換函數的分母設為0，一穩定的LTI系統，會使特性方程式之所有的根（其轉換函數之極點），落於左半平面。

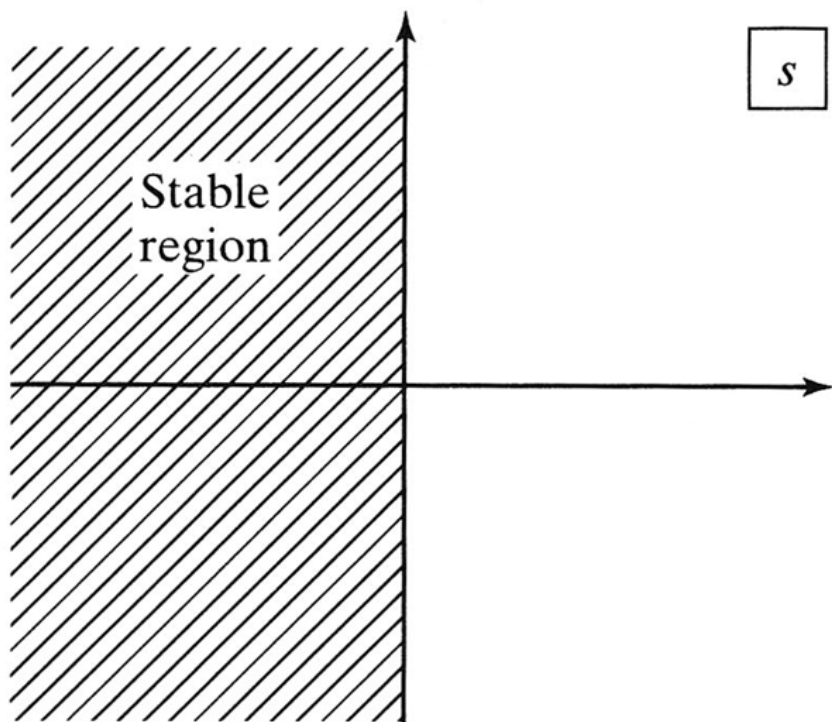


圖 3.38 $H(s)$ 極點之穩定區域

- 可逆性 (Invertibility)

假設因果性系統之轉換函數

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

因此反系統之轉換函數為：

$$H_i(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

- 因為為單邊轉換函數，故反系統亦為因果性系統。系統與反系統皆為穩定，則系統轉換函數之極點與零點皆落於左半平面。

- 頻率響應 (Frequency Response)

傅立葉轉換之定義：

$$F(\omega) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

利用傅立葉轉換，我們求得因果性系統脈衝響應之轉換函數

$$H_f(\omega) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

與拉式轉換得到的轉換函數

兩者比較後，二轉換函數之關係為

$$H_l(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$H_f(\omega) = H_l(s) \big|_{s=j\omega} = H_l(j\omega)$$

表3.5 主要方程式

表 3.5 拉式轉換之主要方程式

方程式名稱	方程式
雙邊拉氏轉換	$\mathcal{L}_b \{f(t)\} = F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
反拉氏轉換	$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, j = \sqrt{-1}$
單邊拉氏轉換	$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
轉換函數	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$