信號與系統

授課老師：孫火清老師

授課班級：日四技電機二甲

教科書：信號與系統精要，陳培文，高立圖書

課程內容

- 導論
- 連續時間信號與系統
- 連續時間線性非時變系統
- **傅立葉級數**
- 傅立葉轉換
- 類比對數位取樣與轉換
- 離散時間信號與LTI系統
- Z轉換與DFT

4.1 週期函數之近似
(Approximating Periodic Functions)

- 我們考慮以時間為獨立變數的函數；例如，函數$x(t)$, t 表示時間。然而這一章中我們將導出，非以時間為獨立變數也成立的函數的結果。

- 週期函數 (Periodic Functions)
  若函數週期為T，在所有的時間t 中，$X(t) = X(t+T)$ ，則為週期函數。

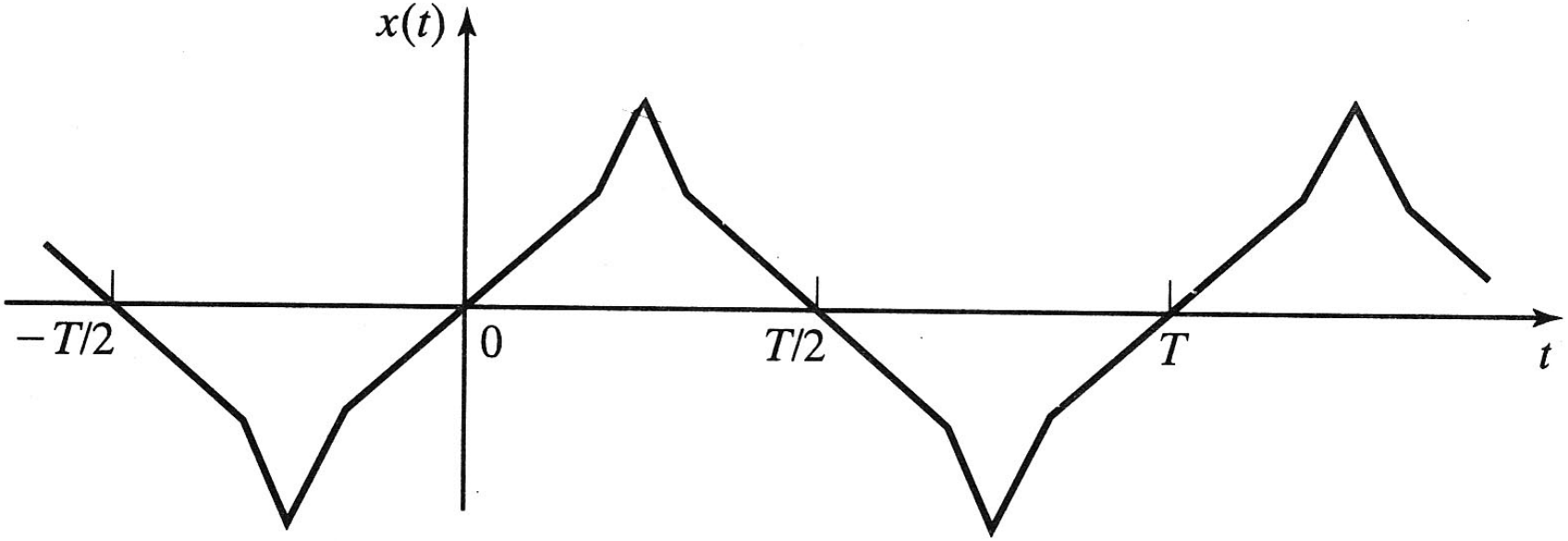


圖 4.1　週期函數

週期函數有下列性質

- 假設週期函數存在於所有的時間t； $X(t)=X(t+T)$ 方程式中，我們沒有限制時間t 的範圍。
- 一函數為週期函數，其週期為T，其週期也是nT，其中n為任意整數。因此對一週期函數 $X(t)=X(t+nT)$ ，其中n為任意整數。
- 我們定義基本週期為：滿足 $X(t)=X(t+T)$ ， T > 0 ，之最小的T值。基本頻率 (fundamental period) 定義為： $\omega_0=2\pi f_0=2\pi/T_0$ 。T_0之單位為秒，ω_0 之單位為徑度 / 秒，f_0 之單位為赫茲 (Hz)。

- 週期函數之近似 (Approximating Periodic Functions)

  考慮圖4.1之週期信號，若此函數為一穩定LTI系統之輸入信號，我們可以在有適當的準確性之下，以弦波函數近似此信號，如圖4.2。

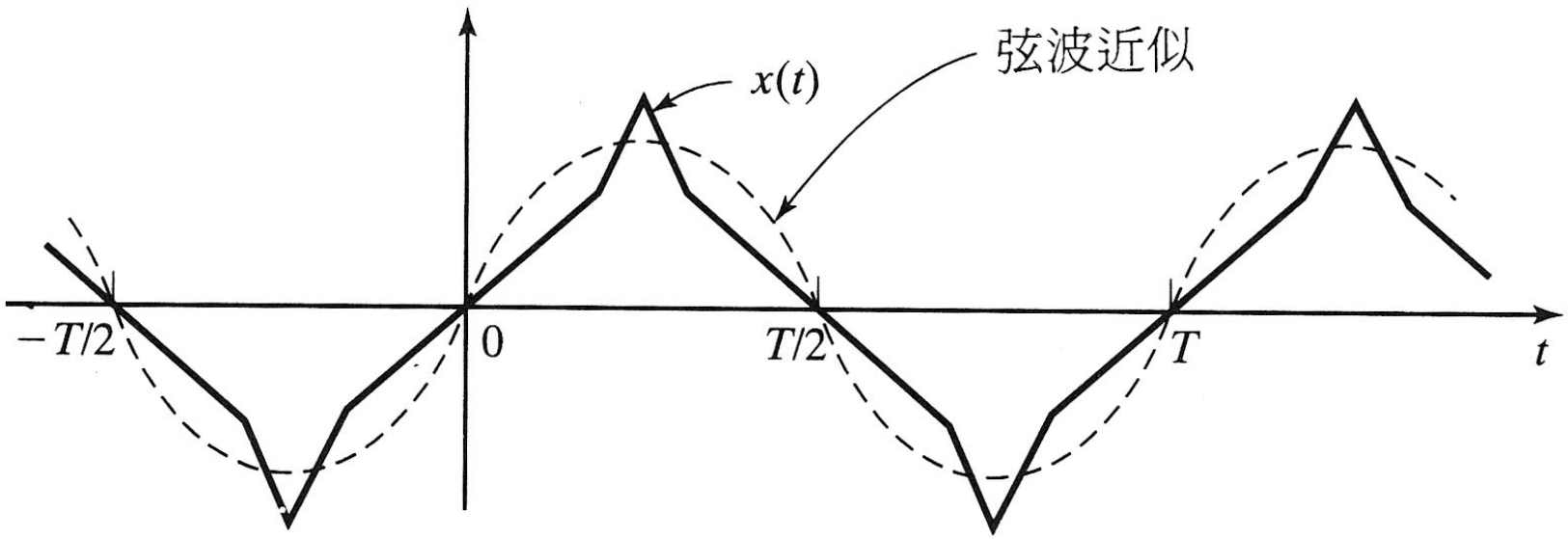


圖 4.2 以弦波近似一週期函數

- 近似函數時，我們通常選擇“最佳”的弦波函數，引號中最佳的意思是，我們可以任意定義，找到最好的近似。
- 近似圖4.2之 $x(t)$ 時，我們定義近似之誤差為

$$e(t) = x(t) - B_1 \sin \omega_0 t$$

一個常被用來最小化的函數為均方差 (mean-square error)。

$$J[e(t)] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^2(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [x(t) - B_1 \sin \omega_0 t]^2\,dt$$

- 函數J [$e(t)$]稱為代價函數 (cost function)。結果使得沒有其他的數值，會比 最小化所得到的，有更小的誤差函數。
- 利用 萊布尼茲公式 (Leibnitiz’s rule)，並且令其結果為0

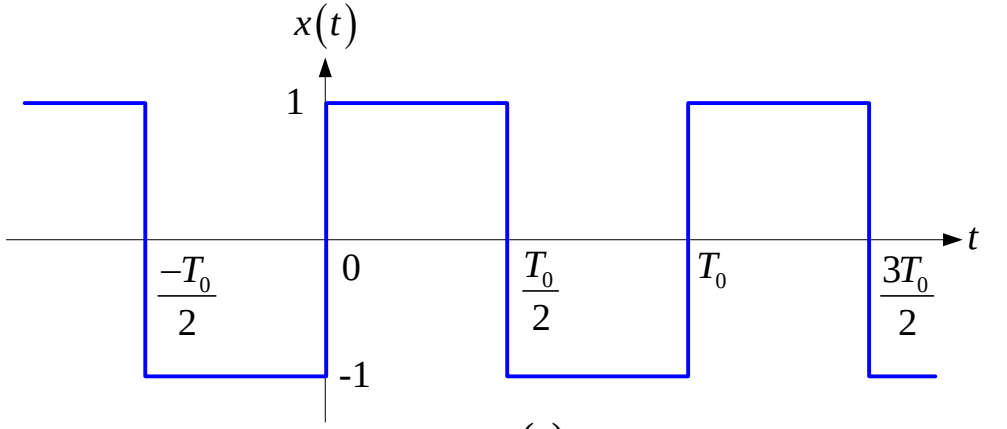
$$\frac{\partial J\,[e\,(t)]}{\partial B_1} = 0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} 2\,[x\,(t) - B_1 \sin\omega_0 t]\,(-\sin\omega_0 t)\,dt$$

解之得到

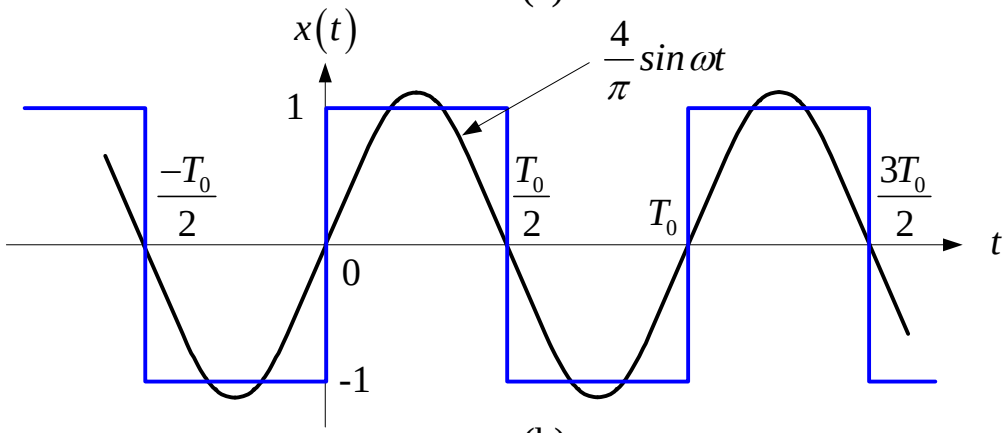
$$B_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x\,(t)\sin\omega_0 t\,dt$$

- 其他誤差函數在最小化過程中可以得到合理的結果，如平均誤差；然而我們選擇均方差，因為它的數學比較容易處理，且能引導我們至傅立葉級數。

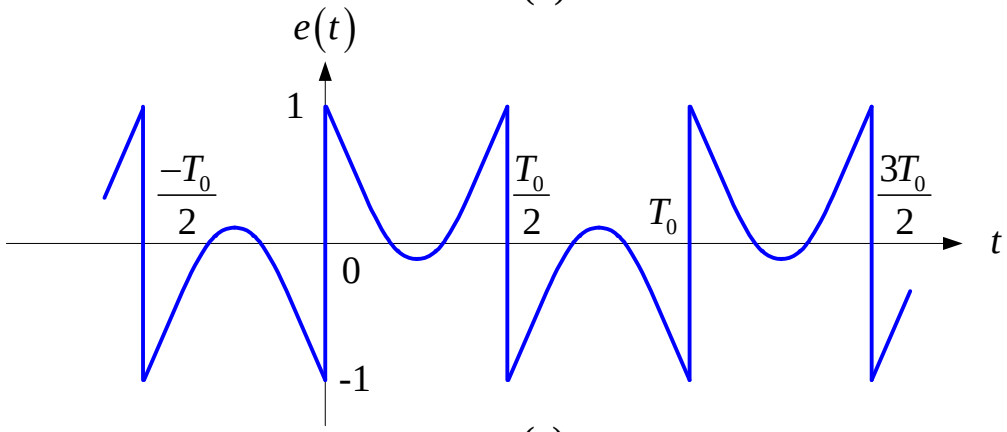
- 圖4.3(c) 說明了最小化時，我們使用均方差 ，而不用平均誤差的原因。原因是大的負誤差值被大的正誤差值消去。然而均方差之函數值為正值，它們不會相互抵消。


x(t)
1
t
−T0/2
0
T0/2
T0
3T0/2
-1

(a)


x(t)
4/π sin ωt
1
−T0/2
T0/2
T0
3T0/2
t
0
-1

(b)


e(t)
1
−T0/2
T0/2
T0
3T0/2
t
0
-1

(c)

4.2 傅立葉級數 (Fourier Series)

- 已知一實數週期信號$x(t)$，此信號之調和級數 (harmonic series) 定義為

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}\ ;\quad C_k=C_{-k}^{*}$$

其頻率w_0稱為基本頻率或第一調和 (first harmonic)，kw_0頻率稱為第k調和。

- 上式的和稱為傅立葉級數之複指數型式 (complex exponential form) 或簡稱為指數型式；C_k係數稱為傅立葉係數。

● C_{-k}等於C_k的共軛複數。係數可以表示為

$$C_k = |C_k| e^{j\theta_k}$$

對於一已知的k值，式中頻率皆為kw_0的兩項之和為

$$\begin{aligned} C_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + C_k e^{jk\omega_0 t} &= |C_k| e^{-j\theta_k} e^{-jk\omega_0 t} + |C_k| e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} \\ &= |C_k| [e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k)} + e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}] \\ &= 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \end{aligned}$$

●因此，若已知係數C_k，我們便可以很容易求出結合三角型 (combined trigonometric form) 之傅立葉級數：

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

- 第三種型式的傅立葉級數可由上式導出。利用此三角恆等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

- 可以得出

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [2|C_k|\cos\theta_k \cos k\omega_0 t - 2|C_k|\sin\theta_k \sin k\omega_0 t]$$

- 我們定義係數A_k與B_k

$$2C_k = 2|C_k|e^{j\theta_k}$$

$$= 2|C_k|\cos\theta_k + j2|C_k|\sin\theta_k = A_k - jB_k$$

- 得到三角型式 (trigonomet-ric form) 之傅立葉級數

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t]$$

三種型式的傅立葉級數　列於表4.2

名　稱	方程式
指數	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$;　$C_k = \lvert C_k \rvert e^{j\theta_k}$,　$C_{-k} = C_k^*$
結合三角	$C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \lvert C_k \rvert \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$
三角	$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t)$ $2C_k = A_k - jB_k$,　$C_0 = A_0$
係數	$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$

- 傅立葉係數 (Fourier Coefficients)

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

基本週期為T_0，積分的上下限為t_1至t_1+T_0，其中t_1為任意值。我們將T_0標示於下限的位置，上限空白表示這個積分：

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

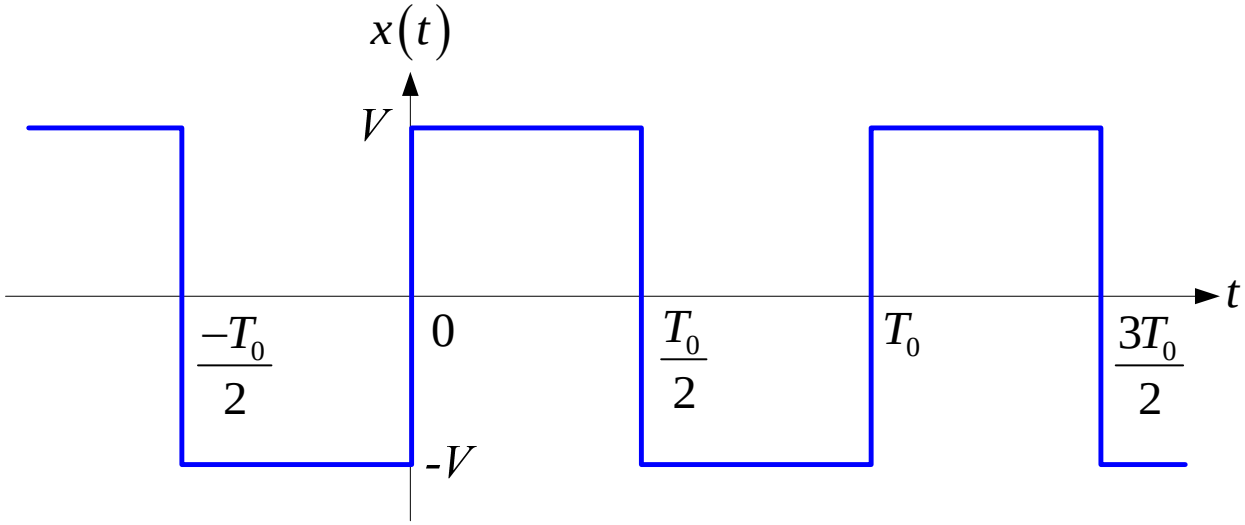
C_0是信號$x(t)$的平均值。由電路分析，此平均值也稱為DC值。

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$$

4.3 傅立葉級數與頻譜

- Ex 4.1 方波之傅立葉級數：我們現在計算方波的傅立葉係數。因為

$$x(t)=\begin{cases} V\ , & 0<t<T_0/2 \\ -V\ , & T_0/2<t<T_0 \end{cases}$$



$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{V}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t} dt - \frac{V}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{V}{T_0(-jk\omega_0)}[\, e^{-jk\omega_0 t}\,|_0^{T_0/2} - e^{-jk\omega_0 t}\,|_{T_0/2}^{T_0}\,]$$

其中 $\omega_0 t\,|_{t=T_0/2} = \frac{2\pi}{T_0}\ \frac{T_0}{2} = \pi$；因此 $\omega_0 T_0 = 2\pi$

$$C_k = \frac{jV}{2\pi k}(e^{jk\pi} - e^{j0} - e^{jk2\pi} + e^{jk\pi})$$

$$= \begin{cases} -\frac{2jV}{k\pi} = \frac{2V}{k\pi}\underline{/-90^\circ}\ , & k \text{ odd} \\ 0\ , & k \text{ even} \end{cases}$$

故方波之指數型式之傅立葉級數為

$$x(t)=\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{2\,\mathrm{V}}{\mathrm{k}\pi}e^{-j\pi/2}e^{jk\omega_0 t}$$

結合三角型式之傅立葉級為

$$x(t)=\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{4\,\mathrm{V}}{\mathrm{k}\pi}\cos(k\omega_0 t-90^\circ)$$

轉變為三角型式，因為 $\cos(a-90^\circ)=\sin a$

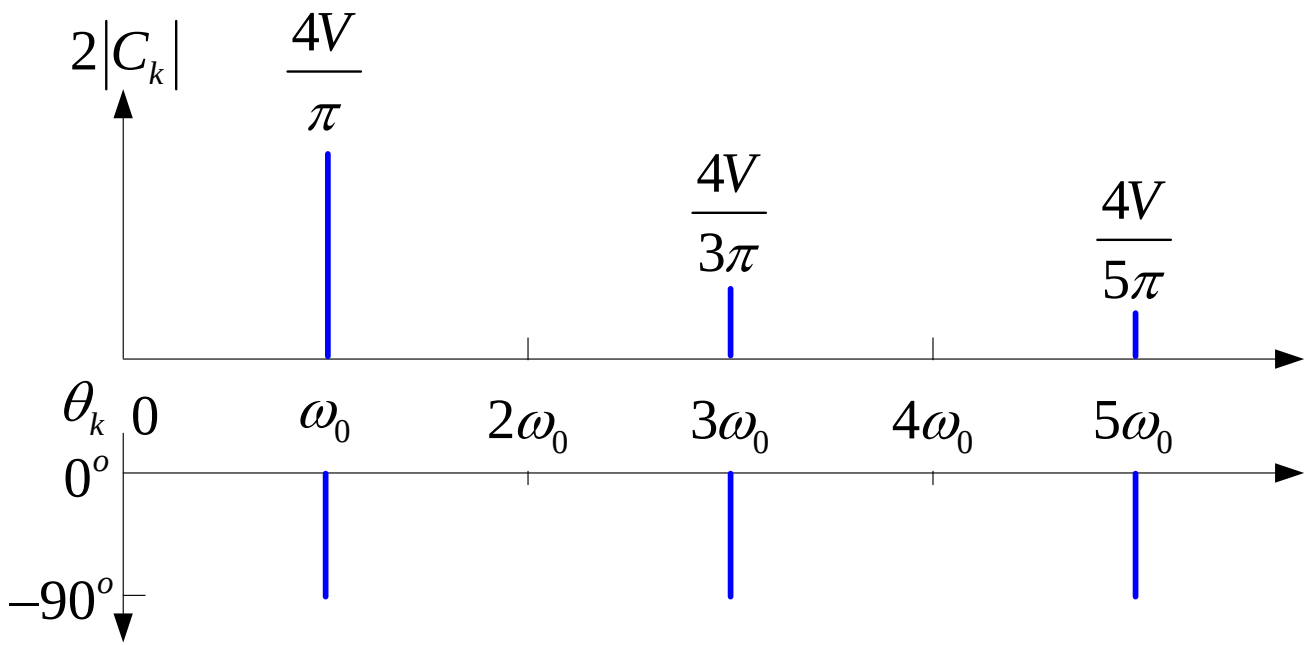
因此

$$x(t)=\sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{4V}{\mathrm{k}\pi}\sin k\omega_0 t$$

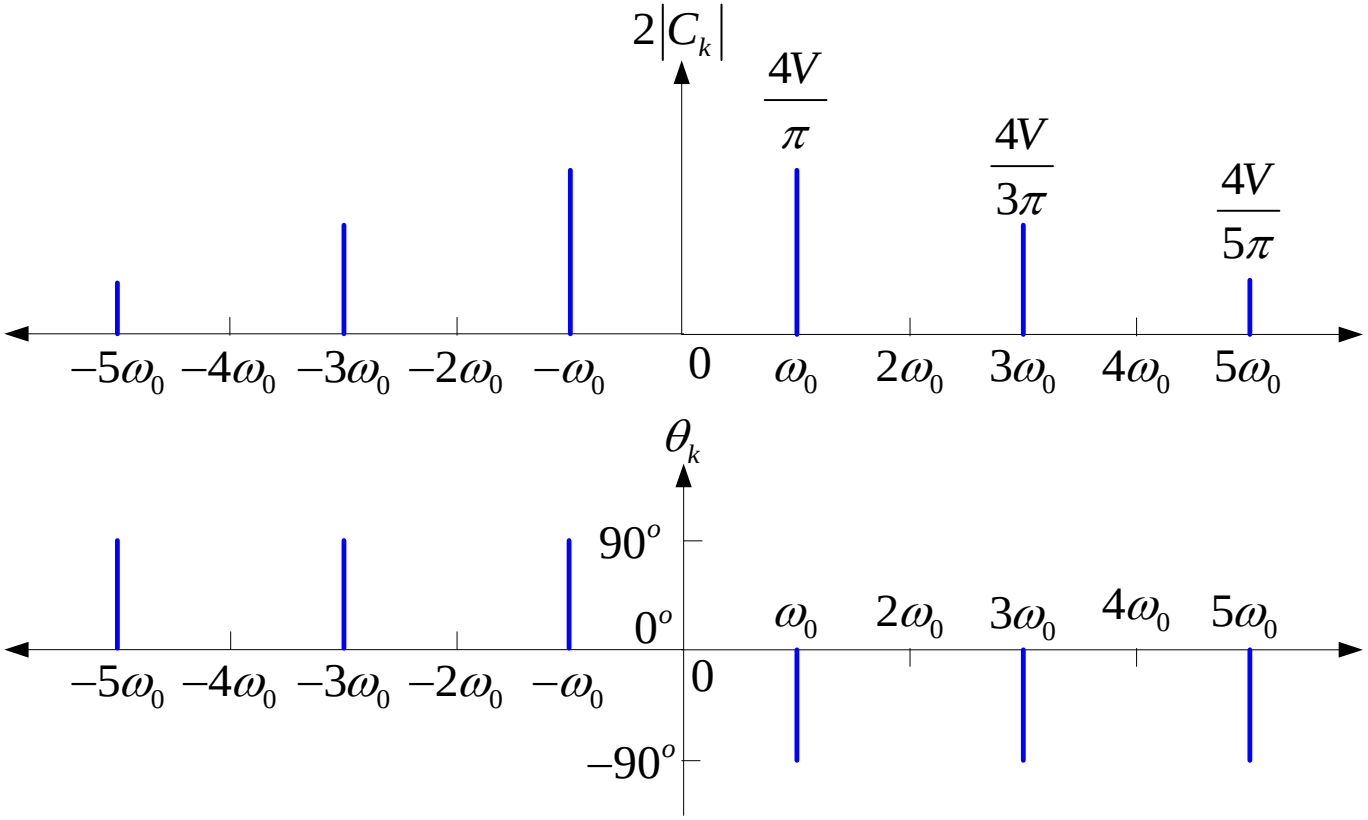
● 頻　譜 (Frequency Spectra)

通常，$(2|C_k|)$ 頻譜是一個圖形，表示週期信號調合各項的振幅 $2C_k = 2|C_k|e^{j\theta_k}$ ，相位 $(\arg C_k)$

圖4.5中為方波之頻譜，顯示 對頻率的數量圖 (數量頻譜)。因為振幅與相位以垂直線表示，此圖形稱為線譜 (line spectra)。



- 第二種顯示週期信號之頻率內容的方式，為傅立葉係數C_k圖形，此圖以$|C_k|$與θ_k作為線譜，對正與負頻率同時繪圖。



● Ex 4.3 脈衝函數之傅立葉級數

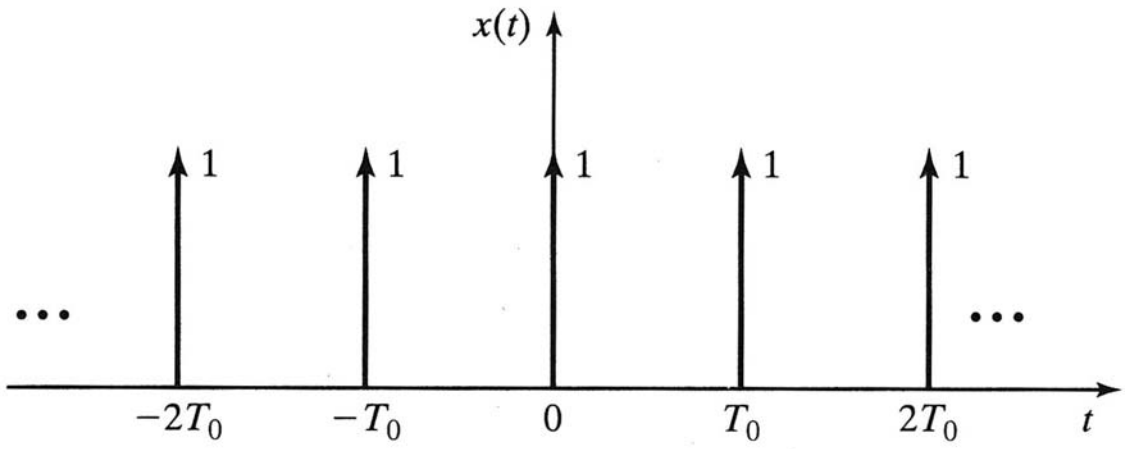


圖 4.7 列脈衝

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

指數型式之傅立葉級數爲

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t}$$

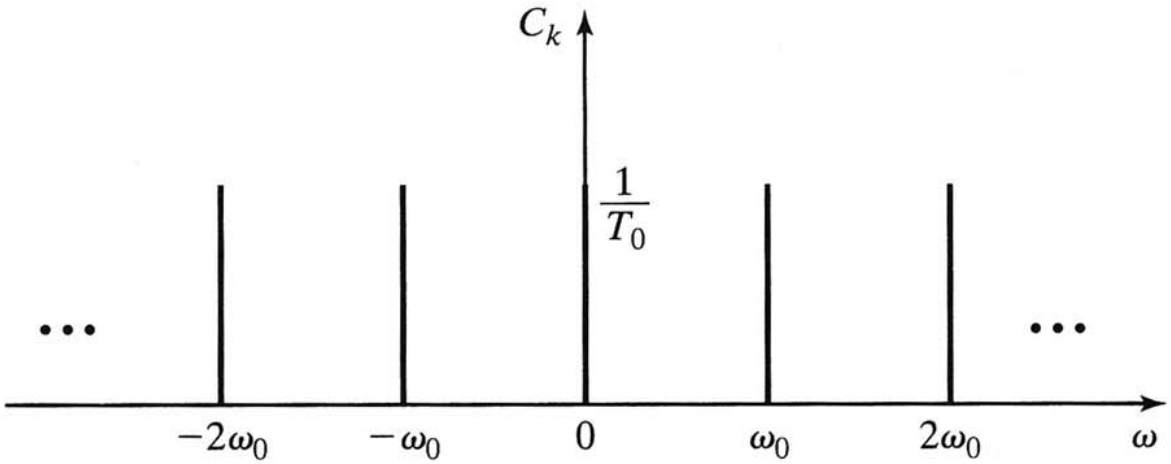


圖 4.8　列脈衝之頻譜

● Ex 4.4 列矩形脈波之頻譜

圖4.9中列矩形脈波之頻譜將被繪出，此波型常在工程中出現。

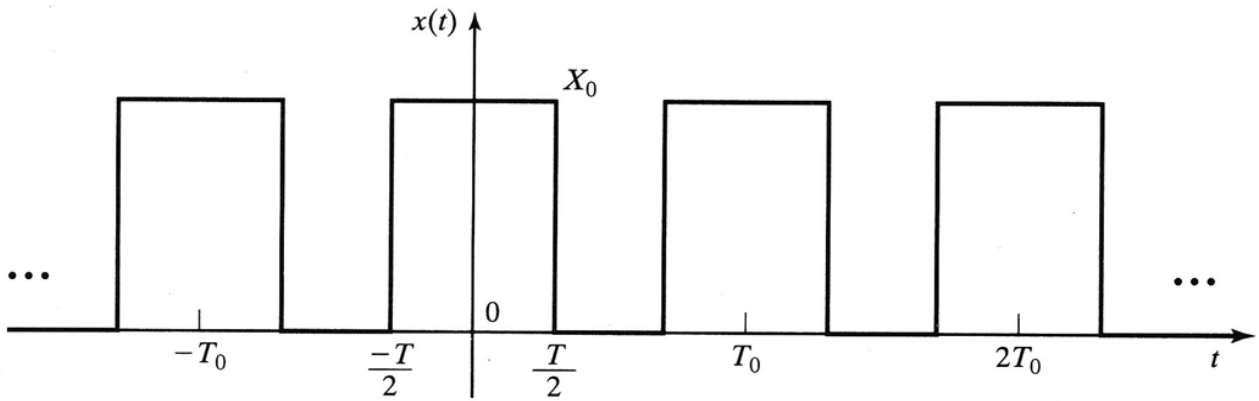


圖 4.9　列矩形脈波

此信號之傅立葉級數為

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{TX_0}{T_0}\operatorname{sinc}\frac{Tk\omega_0}{2}e^{jk\omega_0 t}$$

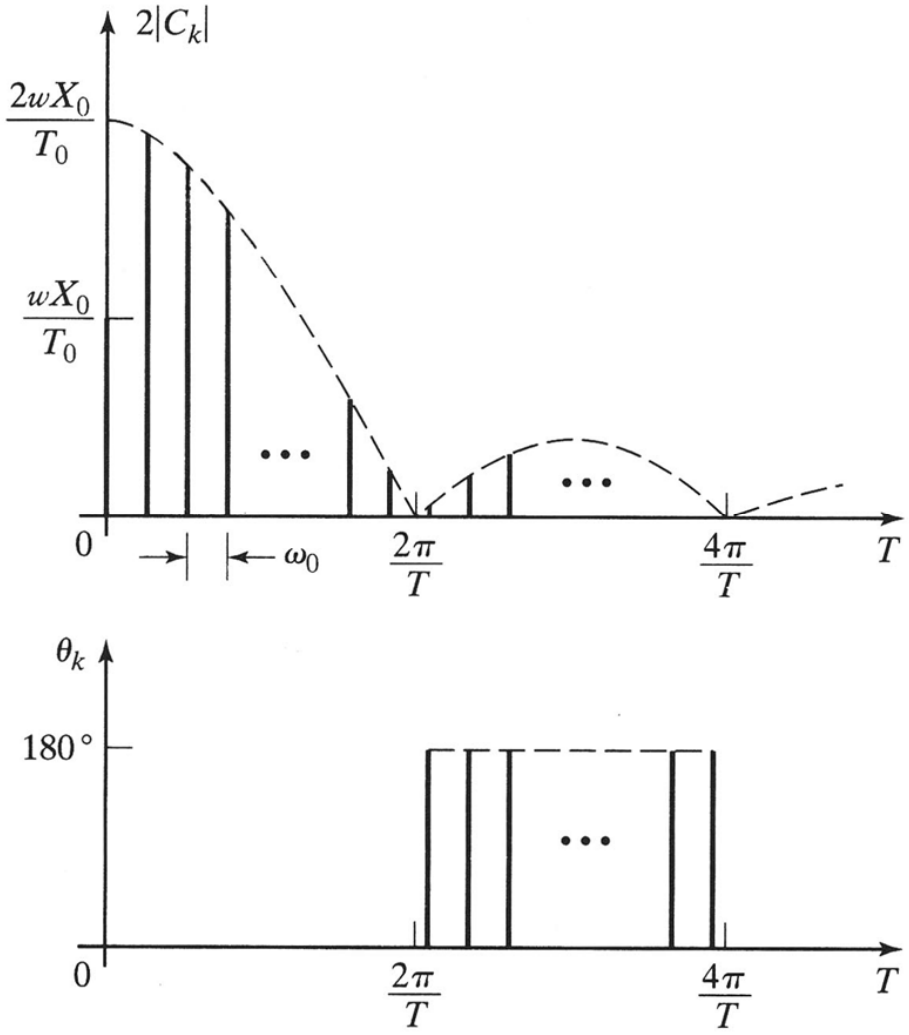


圖 4.10　矩形列脈衝之頻譜

- Sinc(x) 函數經常在信號與系統分析中出現；我們現在更深入研究此函數。定義

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

如前所述，sinc(x)函數在x=0時之值為1。在 $x \neq 0$ 時，在sin(x)為0時，其值為0，即在 $x = \pm\pi$ ，$\pm 2\pi$ ，…時。sinc(x)之數量與角度的特性繪於圖4.11中。

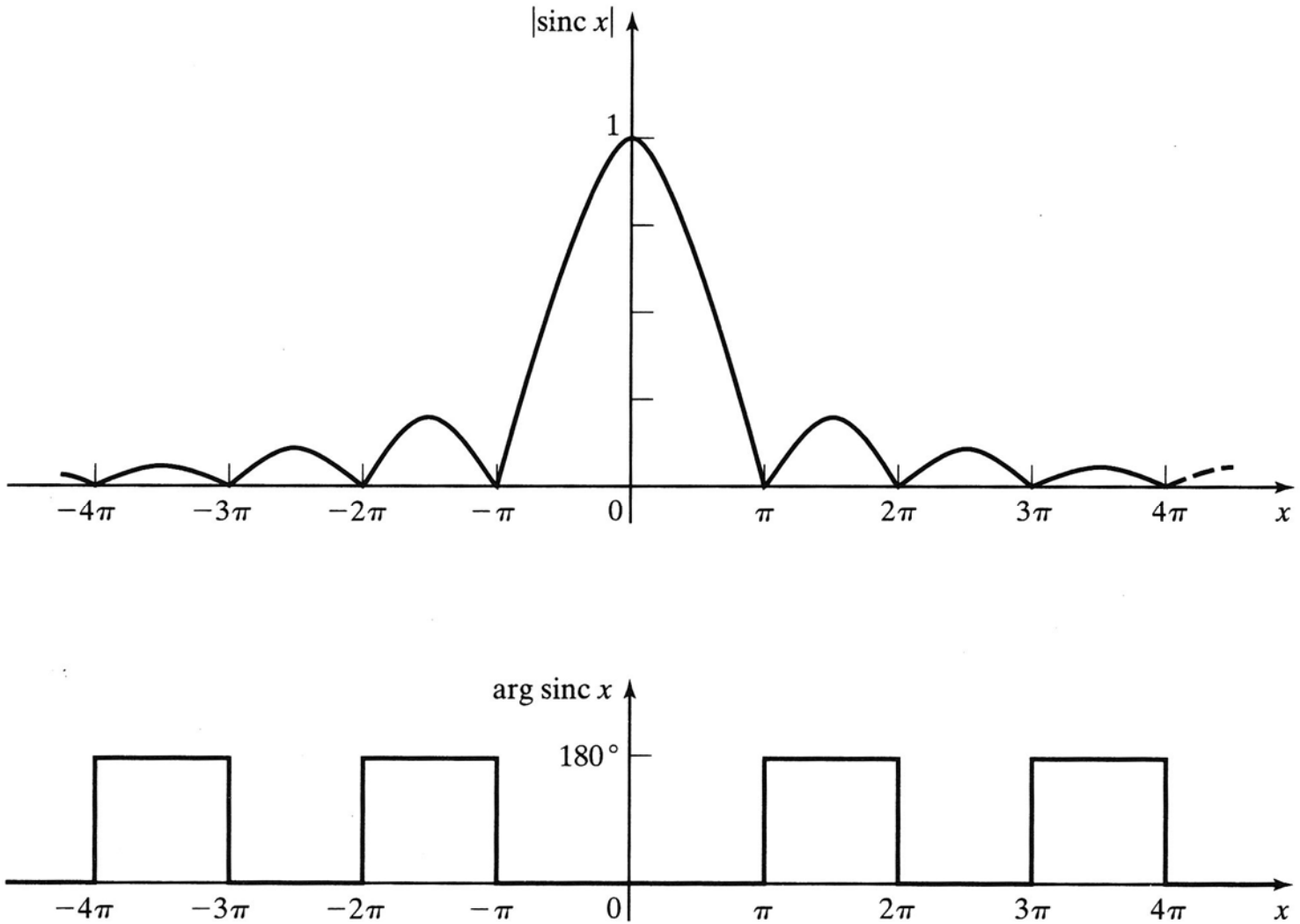
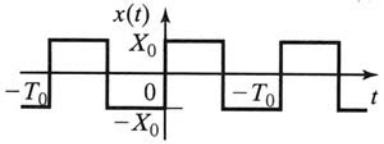
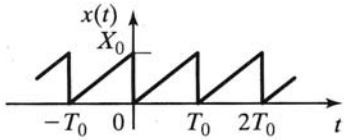
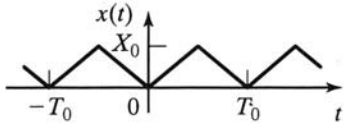
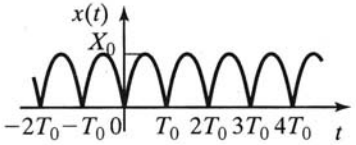
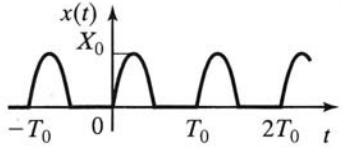
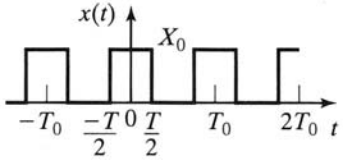
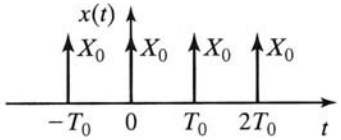


圖 4.11　sin cx 之圖形

表 4.3　常用信號之傅立葉級數

名　稱	波　形	C_0	C_k , $k \neq 0$	備　註
1. 矩形波		0	$-j\dfrac{2X_0}{\pi k}$	$C_k = 0$, k even
2. 鋸齒		$\dfrac{X_0}{2}$	$j\dfrac{X_0}{2\pi k}$	
3. 三角波		$\dfrac{X_0}{2}$	$\dfrac{-2X_0}{(\pi k)^2}$	$C_k = 0$, k even
4. 全波整流		$\dfrac{2X_0}{\pi}$	$\dfrac{-2X_0}{\pi(4k^2-1)}$	
5. 半波整流		$\dfrac{X_0}{\pi}$	$\dfrac{-X_0}{\pi(k^2-1)}$	$C_k = 0$, k odd, except $C_1 = -j\dfrac{X_0}{4}$ and $C_{-1} = j\dfrac{X_0}{4}$
6. 方波		$\dfrac{TX_0}{T_0}$	$\dfrac{TX_0}{T_0}\operatorname{sinc}\dfrac{Tk\omega_0}{2}$	$\dfrac{Tk\omega_0}{2} = \dfrac{\pi Tk}{T_0}$
7. 列脈衝		$\dfrac{X_0}{T_0}$	$\dfrac{X_0}{T_0}$	

4.4 傅立葉級數之性質
(Properties of Fourier Series)

任何滿足狄里切利條件 (Dirichlet condition) 的單值函數，可以展開為傅立葉級數。狄里切利條件為

1. x(t) 在一個週期中，具有有限多個不連續點。
2. 在一個週期中，具有有限多個極大值與極小值
3. x(t) 為有界 (bounded)。

- **對於滿足狄里切利條件的x(t)，下列敘述為真：**

1. 對於每一個具有左側與右側導數的連續點，傅立葉級數收斂至，這些導數可以相同，也可以不相同

2. 若在一點不連續，傅立葉級數收斂至由右側與左側趨近的平均值

3. 幾乎任何週期T_0之連續函數，可以先指定準確度之後，以截斷 (trun-cated) 傅立葉級數近似之。定義近似之誤差為

4. 均方差 (mean square error) 最小化求取係數，定義為

$$\text{mean} - \text{square error} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^2(t)\,dt$$

5. 三角函數之和為週期函數，其為本身之傅立葉級數。

6. 函數 x (t) 第k調合之傅立葉係數，當k 夠大時，其數量至少會 1/k 依遞減。

7. 一個週期函數之和的傅立葉級數，等於各函數之傅立葉級數的和。

- 圖4.12說明了方波的誤差。圖中顯示方波之半週 (half-cycle) 與 (a) 第一調和，(b) 第一與第三調和之和，以及 (c) 第一至第九調和之和。很明顯，增加高階調和可以減少誤差。

- 圖4.12也說明了吉布現象 (Gibbs phenomenon)。當使用比較多項調和，級數的波型起伏變得比較窄，然而接近不連續之處的振幅並不會趨於0，而大約是不連續處高度的9% 。

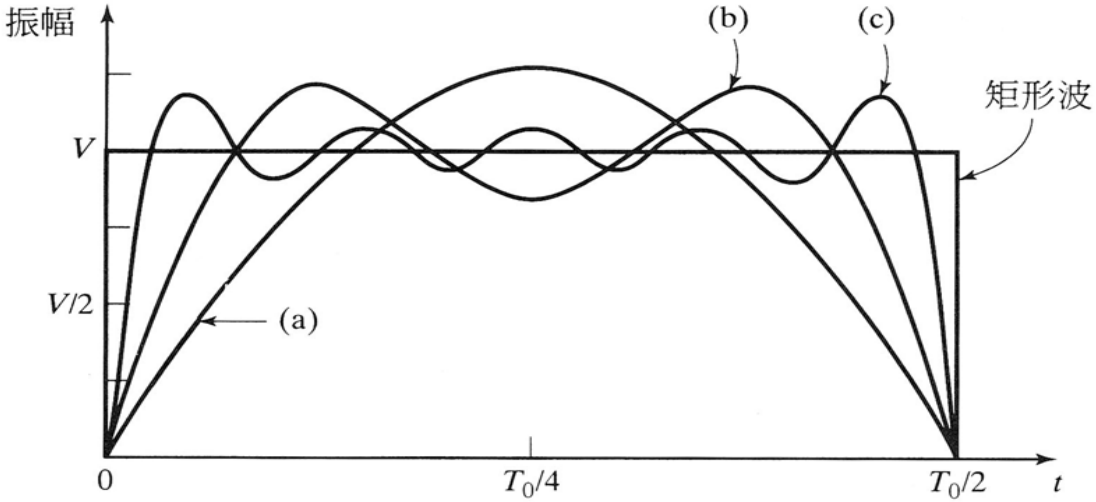


圖 4.12

- 性質6以表4.3之方波與例題4.2說明，其傅立葉係數以下式計算

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{V}}{j\pi k}, & k\ :\mathrm{odd} \\ 0, & k:\mathrm{even} \end{cases}$$

此方波有不連續存在，當*k*趨近於無窮大，其調和趨近於1/*k*。

4.5 系統分析 (System Analysis)

- 這一節，我們考慮一輸入為週期函數的穩定LTI系統之分析。假設系統之輸入是週期函數，並可表示為傅立葉級數。因為是穩定系統，自然響應可以被忽略；只需求出穩態響應 (steady-state response)。

- 我們開始考慮圖4.13之LTI系統，並以系統的標準記號：

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

複指數函數輸入為

$$Xe^{s_1 t} \rightarrow XH(s_1)\, e^{s_1 t}$$

- 對於一週期輸入信號x(t)，我們可以將表示為指數型式的傅立葉級數。由式 (4.26)，$s_1=jkw_0$，式 (4.25) 之系統的表示方式為

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kx} e^{jk\omega_0 t} \rightarrow y_{ss}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) C_{kx} e^{jk\omega_0 t}$$

- 通常C_{kx}與$H(jkw_0)$為複數，因此週期函數之輸出可以表示為傅立葉級數，

$$y_{ss}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{ky} e^{jk\omega_0 t}, \quad C_{ky}=H(jk\omega_0) C_{kx}$$

$H(jw)$稱為系統頻率響應 (system frequency response)。

- 輸入信號之結合三角型式的傅立葉級數為

$$x(t) = C_{0x} + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_{kx}|\cos(k\omega_0 t + \theta_{kx})$$

LTI系統之穩態弦波響應表示為

$$|X|\cos(\omega_1 t + \phi) \rightarrow |X||H(j\omega_1)|\cos[\omega_1 t + \phi + \underline{/H(j\omega_1)}]$$

- 由疊加原則，週期輸入信號式之穩態系統輸出為

$$y_{ss}(t) = C_{0y} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2|C_{ky}|\cos(k\omega_0 t + \theta_{ky})$$

- 例題4.5：輸入信號為矩形波之 LTI系統響應
  假設圖4.13 之 LTI系統，脈衝響應與轉換函數為

$$h(t) = e^{-t}u(t) \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$$

假設輸入信號為圖4.15之方波，$x(t)$ 之傅立葉級數為

$$x(t) = C_{0x} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} C_{kx} e^{jk\omega_0 t} = 2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ odd}}}^{\infty} \frac{4}{\pi k} e^{-j\pi/2} e^{jkt}$$

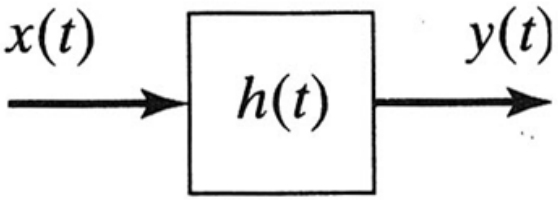


圖 4.13　LTI 系統

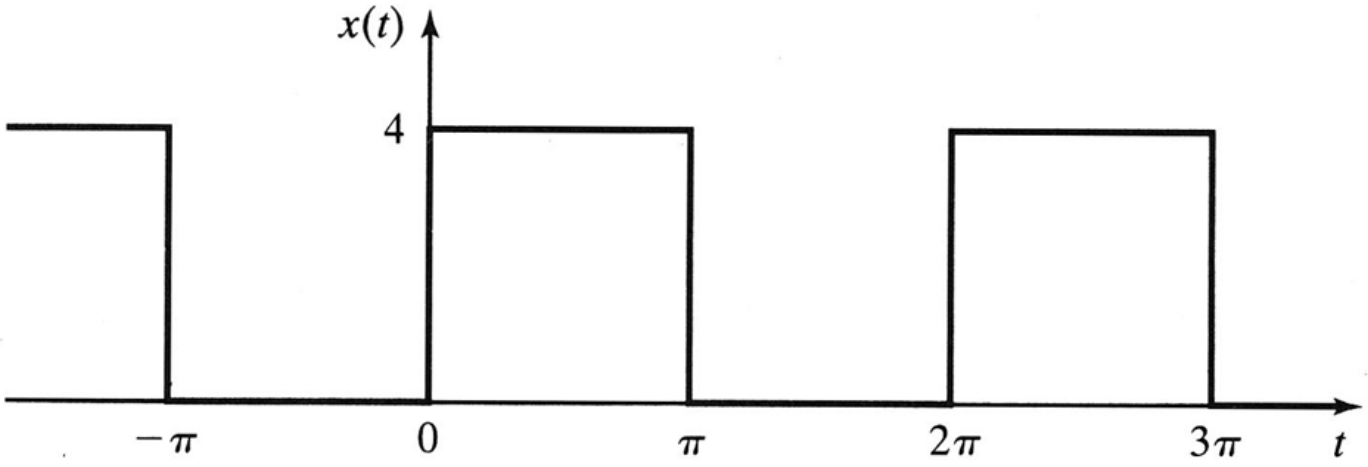


圖 4.15　例題4.5輸入信號

- 現在，

$$H(jk\omega_0)|_{\omega_0=1} = \frac{1}{1+jk} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \angle \tan^{-1}(-k)$$

當k為奇數，

$$C_{ky} = H(jk\omega_0)\, C_{kx} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left[\frac{4}{\pi k} \right] \angle -\pi/2 - \tan^{-1}(k)$$

- 圖4.16中，此系統頻率響應以圖形表示。

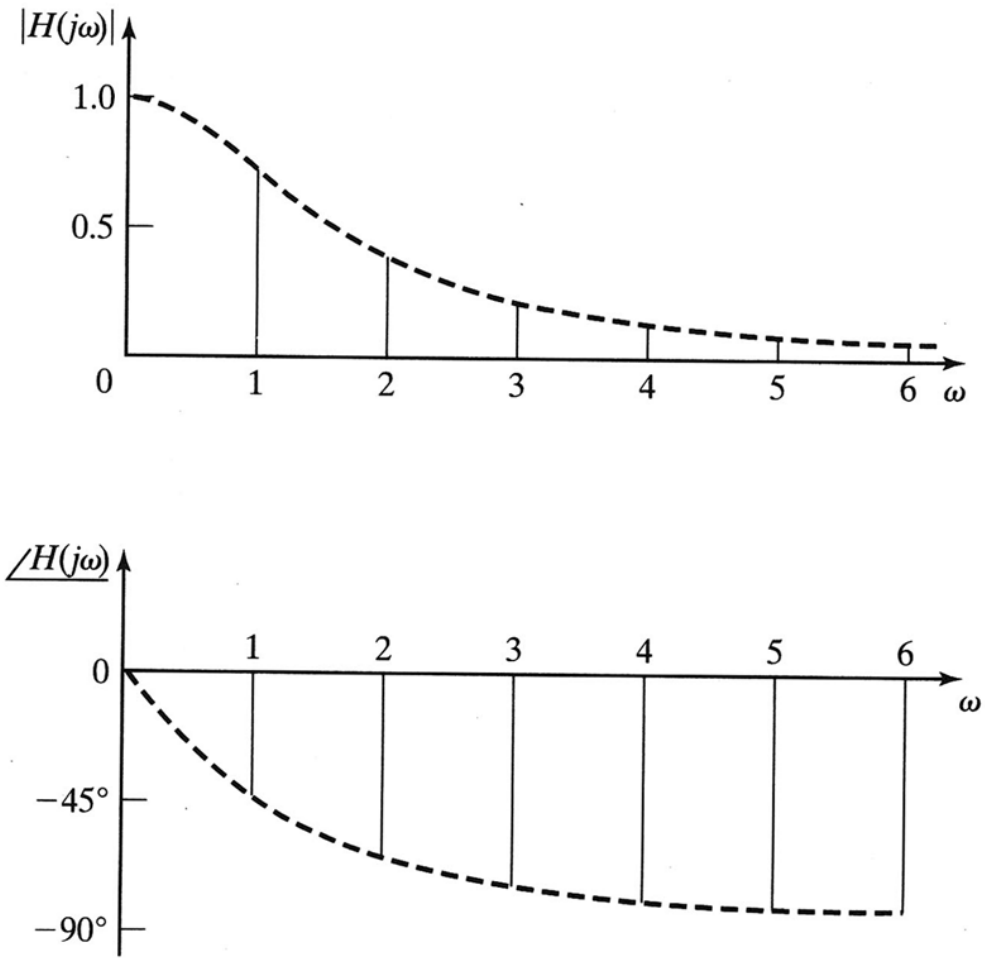


圖 4.16　例題4.5的頻率響應

由圖4.16，低通系統的本質是很明顯的，因為於kw_0趨近於無窮大時，$H(jkw_0)$(稱為頻率於時之增益) 趨近於0。

4.6 傅立葉級數轉換 (Fourier Series Transformations)

- 振幅轉換 (Amplitude Transformation)

  信號$x(t)$之振幅轉換為 $y(t) = Ax(t) + B$

  對於傅立葉級數，B只會影響值。常數A則會影響所有的係數

$$y(t) = C_{0y} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} C_{ky} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= A\left[C_{0x} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} C_{kx} e^{jk\omega_0 t}\right] + B = (AC_{0x} + B) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} AC_{kx} e^{jk\omega_0 t}$$

- 其中C_{kx}為$x(t)$之傅立葉係數，C_{ky}為$y(t)$之傅立葉係數。因此

$$C_{0y} = AC_{0x} + B$$

$$C_{ky} = AC_{kx}\,, \quad k \neq 0$$

- 時間轉換 (Time Transformations)

一般時間轉換為

$$\tau = at + b$$

其中a與b為常數。則

$$y(t) = x(at + b)$$

- 這裡我們只考慮兩種情形 $a = -1$，$b = 0$，與$a = 1$，$b = -t_0$。對 $a = -1$，$b = 0$，我們有$y(t) = x(-t)$，或時間反轉。則

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{ky} e^{jk\omega_0 t} = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kx} e^{-jk\omega_0 t}$$

為將此級數表示為標準型式，我們將k以$-k$代替，得到

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-kx} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kx}^{*} e^{jk\omega_0 t}$$

因為 $C_{-k} = C_k^{*}$ 所以 $C_{ky} = C_{kx}^{*}$

- 當$a=1$, $b=-t_0$ 時。$t_0>0$ 造成時間延遲，$t_0<0$ 造成時間提前。現在

$$y(t)=x(t-t_0)=x(\tau)\big|_{\tau=t-t_0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{kx}e^{jk\omega_0\tau}\Bigg|_{\tau=t-t_0}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{kx}e^{jk\omega_0(t-t_0)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(C_{kx}e^{-jk\omega_0 t_0})\,e^{jk\omega_0 t}$$

- 時間延遲 t_0，對傅立葉係數的影響為

$$C_{ky}=C_{kx}e^{-jk\omega_0 t_0}$$

- 例題4.7：傅立葉級數之振幅與時間轉換

  我們再考慮例題圖4.20的鋸齒波，因此考慮圖4.20(b) 之信號 $y(t)$ ，將之時間反轉後得到 $y_1(t) = x(-t)$

$$C_{ky1} = C_{kx}^{*} = \frac{X_0}{2\pi k} e^{-j\pi/2}, \quad k \neq 0$$

$$k = 0 \qquad C_{0y1} = C_{0x} = X_0 / 2$$

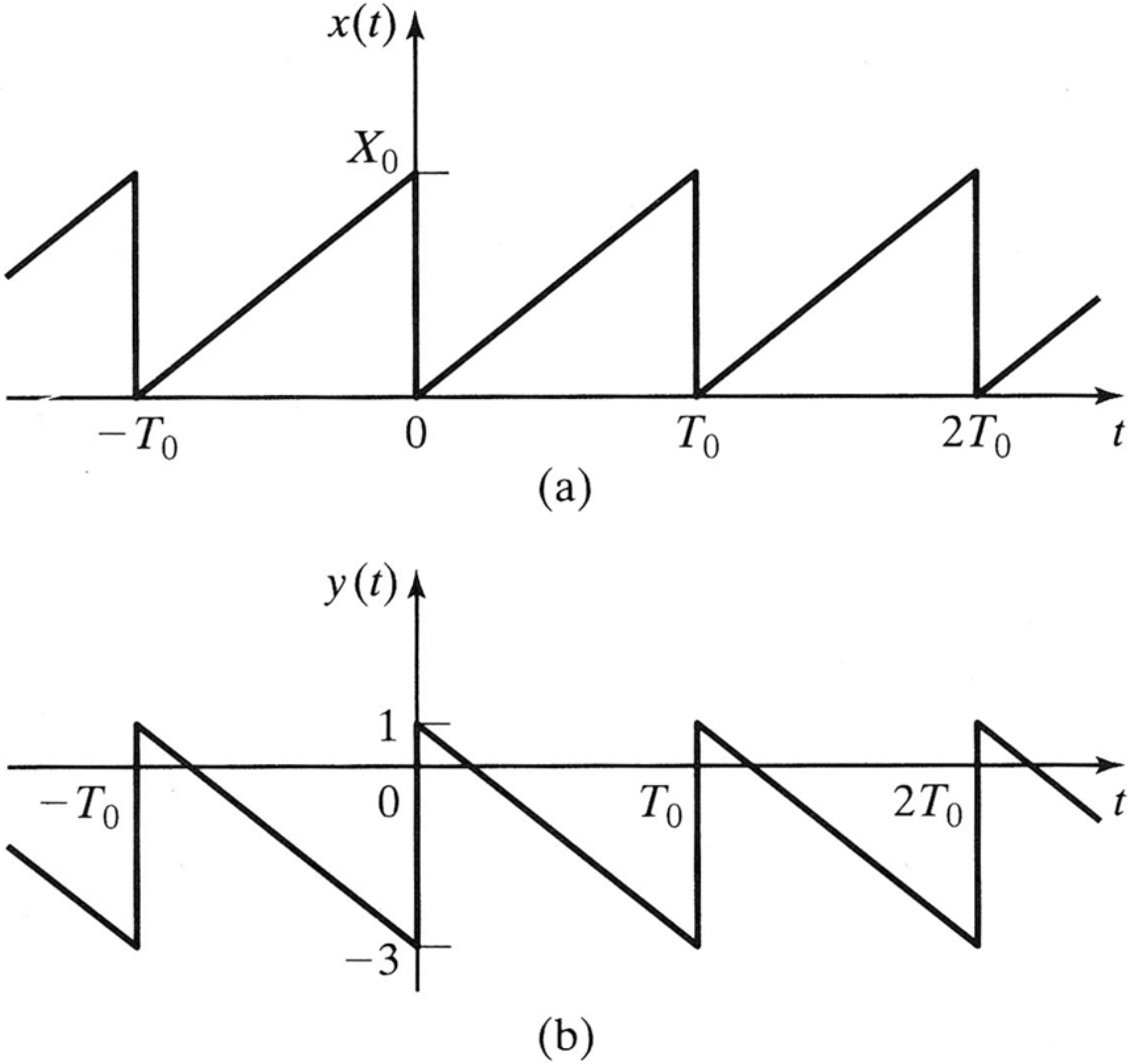


圖 4.20 鋸齒波